FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA SPAZIALE

ANALISI DI MISSIONE*

Diego Lentini

Dipartimento di Meccanica e Aeronautica

Sapienza Università di Roma

anno accademico 2007/08

---

* http://dma.dma.uniroma1.it/STAFF_OLD/lentini/lentini.html (Lecture Notes).

Gli studenti sono caldamente invitati a segnalare eventuali imprecisioni,
richieste di ulteriore chiarimento, e qualsiasi altra proposta di miglioramento, all'autore:

Diego Lentini
Dip. Meccanica e Aeronautica
Via Eudossiana 18
00184 Roma RM

tel. 0644585281
fax 06483729
e–mail diego.lentini@uniroma1.it

Capitolo 1
Introduzione

1.1 Obiettivi dell'analisi di missione

L'analisi di missione ha l'obiettivo di identificare, una volta assegnati la missione da compiere ed il sistema propulsivo, *come* eseguire la missione stessa, ossia come applicare gli impulsi propulsivi, ed in particolare, come eseguire la missione *al costo minimo*. Naturalmente anche la scelta del sistema propulsivo ottimale è a sua volta condizionata dal particolare tipo di missione considerata.

Quindi possiamo dire che l'analisi di missione, a differenza di altre discipline affini come l'astrodinamica, è una disciplina essenzialmente rivolta al conseguimento di un obiettivo.

1.2 Missioni di interesse

Nel seguito consideriamo alcune missioni di interesse, e le loro possibili applicazioni.

1.2.1 Traiettorie balistiche

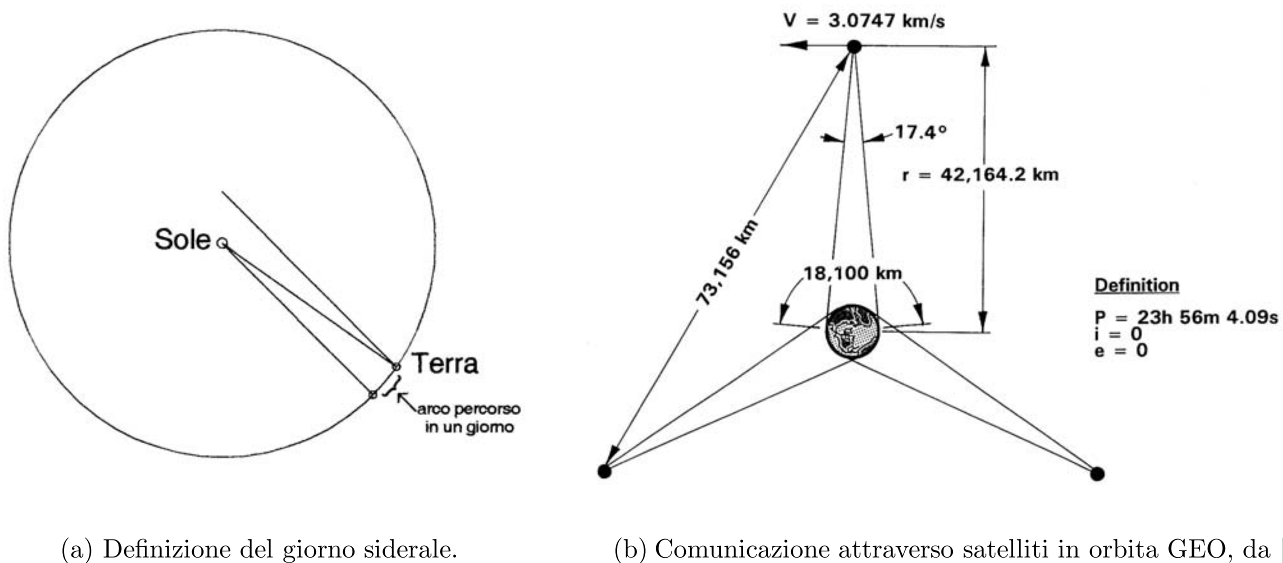
Le traiettorie balistiche (cioè con ricaduta al suolo) sono adottate per esempio nei voli di prova dei vari stadi dei lanciatori, nei razzi sonda, in vettori militari di vario tipo (*ICBM – InterContinental Ballistic Missile*, IRBM – Intermediate Range Ballistic Missile, etc.), per quanto in alcuni sistemi (*FOBS – Fractioned Orbit Ballistic System*) la testata sia iniettata in un'orbita terrestre estremamente bassa, allo scopo di ritardarne l'avvistamento da parte del nemico, e sia successivamente diretta verso l'obiettivo. Anche le traiettorie di caduta degli stadi esauriti di lanciatori seguono una traiettoria balistica.

1.2.2 Orbite terrestri basse (*LEO – Low Earth Orbit*)

Le orbite terrestri basse sono ampiamente impiegate per satelliti di osservazione della superficie e dell'atmosfera terrestri. L'altezza dell'orbita viene scelta sulla base di un compromesso tra campo visuale (ovviamente tanto maggiore è l'altezza dell'orbita, tanto più grande risulta l'ampiezza della superficie terrestre che risulta visibile dal satellite; peggiora tuttavia la risoluzione dei dettagli della superficie rilevabili), esigenze di *tracking* da parte di stazioni di terra (anche in questo caso, orbite più alte consentono al satellite di essere seguito da stazioni di terra che si trovano anche relativamente lontane dalla traccia che esso descrive sulla superficie terrestre), ed impatto delle perturbazioni atmosferiche (tipicamente, un'orbita circolare di altezza circa 200 km si abbassa di qualche centinaio di metri per orbita per effetto della resistenza aerodinamica, una di altezza 400 km di qualche decina di metri per orbita, una di altezza 600 km di qualche metro per orbita). Si possono in particolare usare orbite il cui periodo sia un sottomultiplo intero di un giorno (orbite cosidette 'risonanti'), che consentono di ritrovare il satellite sopra uno stesso punto della superficie terrestre, nei suoi successivi passaggi, alla stessa ora locale, come può essere indicato per esempio per satelliti di ausilio alla navigazione. Per quanto riguarda la scelta dell'inclinazione dell'orbita, occorre osservare che un satellite in orbita equatoriale ($i = 0$) può monitorare solo una ristretta fascia di superficie terrestre intorno all'equatore, mentre un satellite in orbita polare ($i = 90^o$) al contrario copre l'intera superficie terrestre nel corso dei suoi successivi passaggi. Ad ogni modo, nella scelta dell'inclinazione dell'orbita entra anche la latitudine Λ della base di lancio, in quanto com'è noto ([1], par. 4.7) il campo di inclinazione delle orbite raggiungibili da una data base spazia nel campo $\Lambda \leq i \leq 180^o - \Lambda$, a meno di non effettuare successive, costose manovre di correzione dell'inclinazione, vedi par. 3.2. Inclinazioni molto vicine a 90° hanno le orbite eliosincrone ([1], par. 4.8) in cui il valore dell'inclinazione è scelto in funzione dell'altezza dell'orbita in modo tale che la precessione della linea dei nodi dovuta alla non sfericità della Terra porti a farle compiere un giro completo in un anno, così che l'orbita mantenga sempre la stessa orientazione rispetto al Sole; le corrispondenti inclinazioni sono intorno ai 95° circa. Utilizzando in particolare periodi orbitali che siano sottomultipli interi di un giorno (o di una settimana) si riesce quindi ad osservare, nel corso dei successivi passaggi del satellite, la stessa zona della Terra alla stessa ora locale e sotto le stesse condizioni di luce, in modo da poter facilmente rilevare cambiamenti intervenuti nella situazione al suolo, cosa che ha un ovvio interesse per applicazioni di osservazione militare. Le orbite basse presentano un interesse anche per osservazioni meteorologiche, in quanto consentono un'osservazione ravvicinata della Terra; le informazioni andranno tuttavia integrate con quelle di satelliti in orbita alta, che consentono invece di avere una visione globale della circolazione atmosferica sulla Terra. Per motivi simili, le orbite basse sono anche indicate per compiti di osservazione degli oceani. Esse sono anche utilizzate per satelliti di osservazione dello spazio, principalmente per il fatto che sono meno costose di orbite più

alte; tuttavia, in alcuni satelliti astronomici si preferisce utilizzare orbite più alte al fine di ridurre la frazione del campo visivo del satellite occupata dalla Terra. Sempre per il loro minor costo rispetto ad altri tipi di orbite, le orbite basse sono indicate per attività di *space processing*, rivolte alla produzione di semiconduttori, farmaci e leghe che non potrebbero essere altrimenti prodotti sulla Terra (per esempio, le condizioni di assenza di gravità consentono di produrre leghe tra metalli a densità molto diversa fra loro, che non potrebbero essere prodotte sulla Terra in quanto la gravità tenderebbe a far stratificare i due componenti).

1.2.3 Orbite geosincrone e geostazionarie (*GSO – GeoSynchronous Orbit*, *GEO – Geostationary Equatorial Orbit*)



(a) Definizione del giorno siderale.

(b) Comunicazione attraverso satelliti in orbita GEO, da [2].

Figure 1.1: Orbita GEO.

L'intervallo di tempo tra due successive culminazioni del Sole su un dato punto della Terra (mediato su un anno) è il giorno solare medio. In tale intervallo la Terra compie tuttavia poco più di un giro su se stessa, in quanto essa si sposta lungo la sua orbita di circa 1/365,2437 di un giro completo, quindi descrive in un giorno solare una più 1/365,2437 rotazioni, vedi fig. 1.1a (non in scala). Ne segue che la Terra descrive una rotazione completa in

$$T_{sid} = \frac{86400}{1 + \dfrac{1}{365,2437}} = 86164,091 \text{ s} \quad = 23 \text{ h } 56 \text{ m } 4,091 \text{ s} \tag{1.1}$$

dove evidentemente 86400 è la durata di un giorno solare medio espressa in secondi, e 365,2437 e la durata di un anno espressa in giorni solari medi. La grandezza definita dalla (1.1) prende il nome di giorno siderale.

Un'orbita con periodo uguale ad un giorno siderale, e con inclinazione diversa da zero, passerà sulla verticale di un dato punto all'equatore ogni giorno alla stessa ora; essa prende il nome di orbita geosincrona, o GSO. Se poi l'inclinazione dell'orbita risulta uguale a zero, ossia l'orbita giace nel piano equatoriale, il satellite rimane fisso sulla verticale di un punto all'equatore, e si parla quindi in tal caso di orbita geostazionaria, o GEO. Tale orbita risulta particolarmente interessante per satelliti per telecomunicazioni (*Communication Satellite*'s, o *ComSat*'s) in quanto con tre soli satelliti si riesce a coprire la quasi totalità della superficie terrestre, vedi fig. 1.1b, fatta eccezione per una ristretta area intorno ai poli (infatti l'arco di equatore terrestre visibile dal satellite, individuato dalle tangenti alla superficie terrestre condotte dalla posizione del satellite, misura, come si può vedere dalla figura, 18100 km, quindi un po' meno della metà dell'equatore terrestre – ne coprirebbe esattamente la metà solo se il saellite fosse a distanza infinita dalla Terra; in modo simile, il satellite copre un po' meno della metà di un meridiano terrestre, lasciando scoperta una piccola area in prossimità di ambedue i poli). La GEO è anche utilizzata da satelliti meteorologici intesi a dare una visione globale della circolazione atmosferica terrestre, complementando in tal modo le informazioi fornite da satelliti in LEO, vedi par. 1.2.2, e poi da satelliti scientifici. Si noti che l'orbita GEO è unica, per cui si pone il problema del suo affollamento; per evitare che il segnale diretto verso un satellite vada accidentalmente a comandarne un altro, le norme internazionali stabiliscono, tenendo conto della direttività delle antenne attualmente disponibili, una spaziatura minima di 2° tra un satellite e l'altro sulla GEO per Comsat's. I satelliti di comunicazione militari operano invece su differenti bande di frequenze, per cui questo problema non si pone.

1.2.4 Orbite ellittiche

Le orbite ellittiche consentono di esplorare lo spazio a varie distanze dalla superficie della Terra, sono quindi indicate per satelliti scientifici intesi a studiare per esempio il campo magnetico terrestre, le fascie di radiazione, la densità dell'alta atmosfera, etc. Sono anche utilizzate da satelliti militari per effettuare osservazioni a bassa quota, quindi con alta risoluzione; lo stesso risultato potrebbe essere

ottenuto con una LEO circolare molto bassa, ma essa implicherebbe una forta resistenza aerodinamica, con conseguente breve vita del satellite. Utilizzando invece un'orbita ellittica l'arco dell'orbita in cui si ha una forte resistenza aerodinamica è limitato a quello in prossimità del perigeo, portando quindi ad un decadimento dell'orbita del satellite molto più lento. Inoltre, tale decadimento (che si manifesta in un abbassamento del raggio di apogeo, mentre quello di perigeo rimane invariato) può essere compensato apportando ripetute correzioni, dando limitati impulsivi propulsivi in prossimità del perigeo. A fine vita del satellite, quando il propellente è quasi esaurito, viene dato un ultimo impulso all'apogeo che permette di innalzare il perigeo, diminuendo quindi gli effetti di resistenza aerodinamica sul satellite e consentendo quindi di rimandare nel tempo il rientro del satellite. Questo accorgimento è necessario in quanto abitualmente questi satelliti militari hanno una fonte di energia (per evitare l'uso di ampi pannelli fotovoltatici, individuabili con relativa facilità) basata sul decadimento di isotopi radioattivi (plutonio 238, da non confondere con gli isotopi fissili 239 e 241), che produrrebbe quindi forti problemi di inquinamento ricadendo sulla Terra. In ogni caso, in questo modo il problema è solo rimandato alle generazioni future.

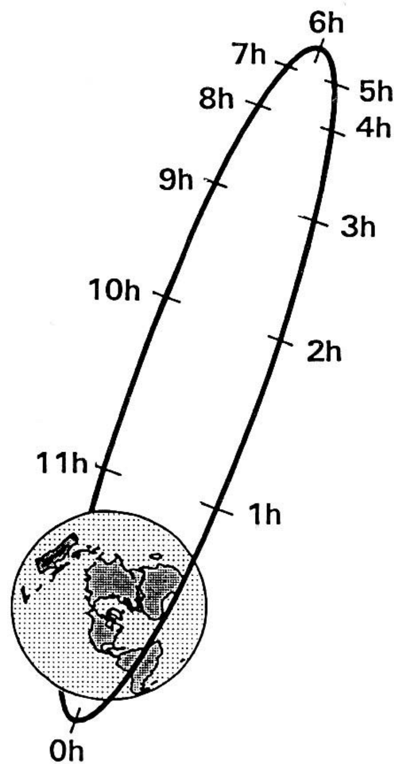


Figure 1.2: Orbita dei satelliti Molniya, da [2].

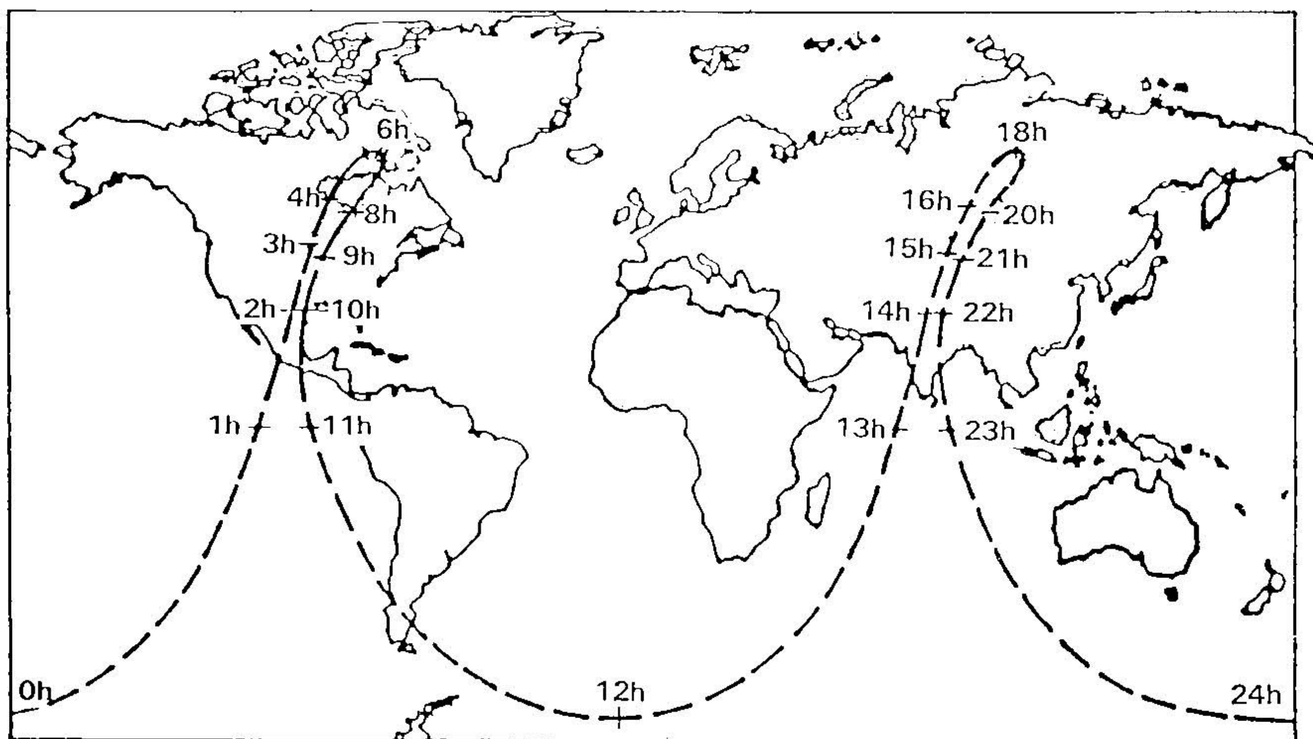


Figure 1.3: Traccia dell'orbita dei satelliti Molniya, da [2].

Un'interessante applicazione delle orbite ellittiche si ha nei satelliti russi (ex URSS) denominati Molniya. La Russia comprende vaste aree site a latitudini molto elevate, che sono quindi difficilmente servite da satelliti per telecomunicazioni in GEO, vedi par. 1.2.3, anche perché le antenne di terra presentano un certo angolo morto al disotto del quale non possono andare, per esempio 30° sopra l'orizzontale. I satelliti Molniya sono inseriti su un'orbita fortemente ellittica ad alta inclinazione, con periodo pari a dodici ore (altezza di perigeo circa 500 km, altezza di apogeo circa 39000 km), per cui ritornano alla stessa ora sullo stesso punto della superficie terrestre due volte al giorno. Si fa in modo che l'apogeo dell'orbita del satellite si trovi sulla verticale dell'area da servire, in modo tale che il satellite passi una gran parte del suo periodo orbitale sopra quest'area (all'apogeo la velocità del satellite è minima), vedi figg. 1.2, 1.3, dove sono anche indicati gli archi percorsi ad intervalli di un'ora; ovviamente sono necessari più satelliti per assicurare una copertura continua durante l'intero arco della giornata. Per evitare che la precessione della linea degli absidi sposti la posizione dell'apogeo rispetto all'area della superficie terrestre da servire, si adotta un'inclinazione di 63,4^o, la quale consente di annullare la precessione absidale dovuta alla non sfericità della Terra ([1], par. 4.6.2

e 4.8), e nello stesso tempo di servire le regioni ad alta latitudine della Russia. Un inconveniente di queste orbite, rispetto alla GEO, è che le antenne di terra, anziché essere fisse, devono seguire costantemente il satellite nel moto lungo la sua orbita.

1.2.5 Missioni lunari

Abbiamo sin qui considerato missioni nello spazio circumterrestre, ma rivestono ovviamente interesse dal punto di vista scientifico anche missioni verso altri corpi celesti. La Luna è il corpo celeste di gran lunga più vicino, e per il suo studio possono essere considerate:

1. missioni di semplice impatto sulla superficie lunare, oppure di *fly–by* (sorvolo) per poter studiare da vicino la superficie, anche se per un tempo molto limitato;
2. missioni per inserire un satellite artificiale in orbita lunare, che consenta quindi uno studio senza limiti di tempo della superficie e dello spazio intorno alla Luna;
3. missioni di atterraggio morbido (*soft–landing*) per poter studiare la composizione e le caratteristiche della superficie, eventualmente anche con l'aiuto di un mezzo semovente;
4. missioni di andata e ritorno, per esempio per riportare sulla Terra campioni del suolo lunare, oppure con equipaggio umano.

1.2.6 Missioni interplanetarie

Queste missioni possono essere dirette allo studio dei pianeti, dei loro satelliti, degli asteroidi, delle comete, del Sole, od ancora dello spazio interplanetario. Anche in questo caso, possiamo considerare:

1. missioni di semplice impatto sulla superficie, oppure di *fly–by* (sorvolo);
2. missioni per inserire un satellite artificiale in orbita attorno al corpo celeste obiettivo;
3. missioni di atterraggio morbido (*soft–landing*). L'uso di mezzi semoventi presuppone in questo caso una loro qualche autonomia, in quanto i tempi di comunicazione con la Terra sono (almeno) di parecchi minuti;
4. missioni di andata e ritorno.

Per missioni di atterraggio morbido, ed eventualmente di andata e ritorno, risulta interessante l'opzione di utilizzare le atmosfere planetarie per il frenaggio (esclusi Mercurio e Plutone, privi di atmosfera). Inoltre, per le missioni interplanetarie verso pianeti lontani risulta interessante la possibilità di utilizzare manovre di *swing–by*, o fionda gravitazionale, per aumentare la velocità della sonda rispetto ad un sistema inerziale, vedi par. 5.3, e proseguire quindi la missione verso altri corpi celesti.

1.2.7 Missioni interstellari

Le missioni interstellari hanno ovviamente al momento attuale un interesse puramente speculativo, tuttavia riteniamo interessante tentare almeno di identificare i problemi che si avrebbero in un'ipotetica missione di questo tipo.

1.3 Equazione di Tsiolkowsky

Ricaviamo ora una relazione tra l'incremento di velocità Δv richiesto per una data missione, e la quantità di propellente da caricare a bordo. Questa è data dalla ben nota equazione di Tsiolkowsky, della quale vogliamo ricordare le ipotesi:

1. la spinta F del motore è l'unica forza agente sul razzo; si trascurano quindi le forze aerodinamiche, gravitazionali, etc., ovvero si assume che il razzo si trovi in una regione dello spazio lontana da corpi celesti che possono dar luogo agli effetti appena citati. Si osservi comunque che tale ipotesi è rispettata anche nel caso in cui le varie forze, oltre la spinta, che agiscono sul razzo siano in equilibrio fra loro, come nel caso di un satellite in orbita circolare intorno alla Terra (quindi forze aerodinamiche nulle se l'orbita è sufficientemente alta, e forza peso compensata dalla forza centrifuga dovuta al moto circolare del satellite, ammesso di poter trascurare l'effetto di altri corpi celesti come la Luna);

2. velocità efficace d'uscita c costante;

3. spinta agente nella direzione della velocità.

Applichiamo per il momento queste ipotesi ad un razzo monostadio, vedi fig. 1.4, caratterizzato da una velocità efficace d'uscita (misurata in m/s) definita al solito come

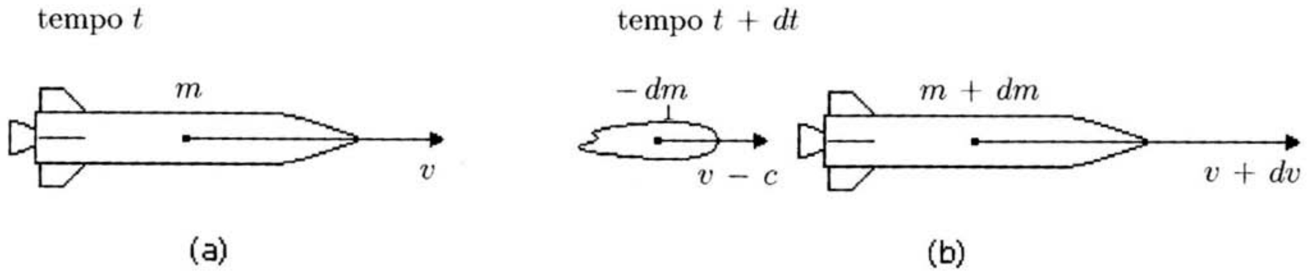


Figure 1.4: Derivazione dell'equazione di Tsiolkowsky: situazione prima (a sinistra) e dopo (a destra) l'espulsione di una massa infinitesima di fluido propulsivo, adattata da [3].

$$c = \frac{F}{\dot{m}} \tag{1.2}$$

dove $\dot{m}$ è la portata in massa di propellenti; essa è ovviamente legata all'impulso specifico (misurato in s), definito come rapporto tra la spinta e la portata *in peso* dei propellenti

$$I_{sp} = \frac{F}{g_0\,\dot{m}} \tag{1.3}$$

dalla relazione

$$c = g_0\,I_{sp} \tag{1.4}$$

In queste espressioni si assume per l'accelerazione di gravità il valore standard sulla Terra al livello del suolo, $g_0 = 9{,}80665$ m/s^2.

In fig. 1.4 assumiamo l'asse x diretto secondo la velocità (quindi anche secondo l'asse del razzo, per le ipotesi avanzate), e la velocità v ad esso equiversa. Applichiamo l'equazione di Newton nella forma

$$\sum \vec{F}_e = \frac{d\vec{q}}{dt} \tag{1.5}$$

dove $\vec{F}_e$ e $\vec{q}$ sono rispettivamente la risultante delle forze esterne e la quantità di moto. Proiettando questa relazione sull'asse x del moto si ha un'equazione scalare nella forma

$$\sum F_e \;=\; \frac{dq}{dt} \tag{1.6}$$

Applichiamo questa relazione al sistema costituito dal razzo più la massa infinitesima di propellente $-dm$ (si noti che la massa m del razzo diminuisce nel tempo per effetto dell'espulsione dei propellenti, per cui dm è negativo) che viene espulsa tra il tempo t ed il tempo $t + dt$; sotto le ipotesi citate la risultante delle forze esterne è nulla (l'unica forza agente è la spinta, che è una forza interna al sistema considerato), per cui la (1.6) si riduce ad esprimere che la quantità di moto al tempo t (m e v indicano la massa e la velocità del razzo al tempo t)

$$m\,v \tag{1.7}$$

eguagli quella al tempo $t+dt$, la quale si scinde in quella relativa al razzo (che ora ha massa $m + dm$, ricordando che dm è negativo, e velocità $v + dv$), e quella relativa alla massa infinitesima $-dm$ espulsa a velocità $-c$ rispetto al razzo in moto a velocità v (il segno meno indica che è espulsa in senso opposto alla direzione del moto), per cui la velocità del propellente espulso, nel riferimento x, è $v - c$, dando quindi una quantità di moto

$$(m\,+\,dm)\,(v\,+\,dv)\;+\;(-\,dm)\,(v\,-\,c) \tag{1.8}$$

Eguagliando (1.7) e (1.8), e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ha

$$dv \;=\; -\,c\,\frac{dm}{m} \tag{1.9}$$

che avendo supposto $c = \text{cost}$ può essere integrata tra l'istante iniziale (massa iniziale m_0) e l'istante finale (massa finale m_f) per dare

$$\Delta v \;=\; c\,\log\frac{m_0}{m_f} \tag{1.10}$$

che è appunto l'equazione di Tsiolkowsky. La massa di propellenti necessaria per conseguire il Δv richiesto può quindi essere determinata come differenza tra la massa iniziale e quella finale

$$m_p = m_0 - m_f \tag{1.11}$$

La massa finale è costituita dalla massa del carico utile m_u e dalla massa delle strutture m_s

$$m_f = m_u + m_s \tag{1.12}$$

Si può introdurre un *rapporto di massa* del razzo, definito qui come rapporto tra massa finale e massa iniziale (quindi un numero minore di uno), ed indicato come MR

$$MR = \frac{m_f}{m_0} \tag{1.13}$$

per il quale risulta quindi, per l'eq. di Tsiolkowsky (1.10),

$$MR = \exp\left(-\frac{\Delta v}{c}\right) \tag{1.14}$$

la quale consente di identificare il rapporto di massa che bisogna avere per conseguire un dato Δv, assegnata c. Analogamente, si può ricavare il Δv conseguibile con un dato rapporto di massa, assegnata c, come

$$\Delta v = c \log \frac{m_0}{m_f} = -c \log MR \tag{1.15}$$

L'eq. di Tsiolkowsky è una relazione molto utile in quanto consente appunto di legare il rapporto di massa al Δv richiesto, però essa è stata ricavata sotto ipotesi molto restrittive, in particolare per quanto riguarda le forze applicate, che si è assunto comprendano la sola spinta F del motore. Essa sembrerebbe quindi a prima vista non applicabile a manovre reali. Tuttavia, è ancora possibile usarla per manovre reali se al Δv idealmente richiesto sotto le ipotesi adottate per l'eq. di Tsiolkowsky, che indichiamo come Δv_{ideal}, viene aggiunto un ulteriore Δv per tener conto delle perdite introdotte dalla presenza di effetti reali (per esempio dovuti a forze aerodinamiche, gravitazionali, ed altri effetti che esamineremo tra breve), e che indichiamo con Δv_{losses}. Per poter applicare l'equazione di Tsiolkowsky a manovre reali, occorre quindi introdurre in essa un Δv efficace definito come

$$\Delta v \; = \; \Delta v_{ideal} \; + \; \Delta v_{losses} \tag{1.16}$$

Vedremo nel seguito come valutare il Δv delle perdite; esso può essere ricavato solo integrando le equazioni del moto, comprensive di tutti gli effetti reali. Tuttavia, vedremo che Δv_{losses} assume valori che per ciascuna missione sono abbastanza tipici, il che permette di utilizzare l'eq. di Tsiolkowsky per calcoli di prima approssimazione, con risultati senz'altro accettabili.

Compito quindi dell'analisi di missione è individuare il Δv efficace per ciascuna missione, ed in particolare individuare la manovra che richiede il Δv minimo, cioè il minimo consumo di propellenti ossia, cosa ancora più importante, il massimo carico utile.

Osserviamo tuttavia che nell'integrazione della (1.9), che ha portato appunto all'eq. di Tsiolkowsky (1.10), è stata adottata l'ipotesi di velocità efficace di uscita c costante. Questa ipotesi in alcuni casi è molto ben approssimata, ma in altri lo è assai meno. In particolare, nel caso dei motori del primo stadio di un lanciatore, mentre la portata in massa $\dot{m}$ è costante (poiché l'ugello lavora in condizioni di flusso critico), la spinta

$$F \; = \; \dot{m} \, u_e \; + \; A_e \, (p_e \; - \; p_a) \tag{1.17}$$

aumenta mentre il razzo sale perché la pressione ambiente p_a diminuisce con la quota; ne segue che la velocità efficace di uscita (1.2) aumenta. La variazione tra la velocità efficace di uscita al livello del suolo e quella nel vuoto può arrivare al 25% circa. Per gli stadi superiori, che operano sostanzialmente nel vuoto, la variazione di c è trascurabile. Nei motori dei sistemi propulsivi di satelliti, alimentati a gas in pressione, possono ancora aversi variazioni di c nel tempo qualora questa alimentazione sia del tipo a *blowdown*, ossia senza regolatore di pressione a valle del serbatoio del gas pressurizzante. In questo caso la pressione in camera di combustione è direttamente legata alla pressione nel serbatoio del gas pressurizzante, la quale decresce man mano che tale serbatoio si svuota. Diminuendo la pressione in camera, fissato il rapporto d'espansione dell'ugello – quindi il rapporto p_e/p_c, diminuisce la pressione di uscita p_e, per cui diminuisce c (un'analisi più accurata mostra che in realtà al diminuire della pressione in camera diminuisce anche la velocità caratteristica c^*, per effetti di dissociazione chimica).

1.3.1 Rapporto di carico utile

La (1.14) dà il rapporto di massa (1.13) in base al rapporto tra incremento di velocità richiesto e velocità efficace di uscita

$$\frac{\Delta v}{c} \tag{1.18}$$

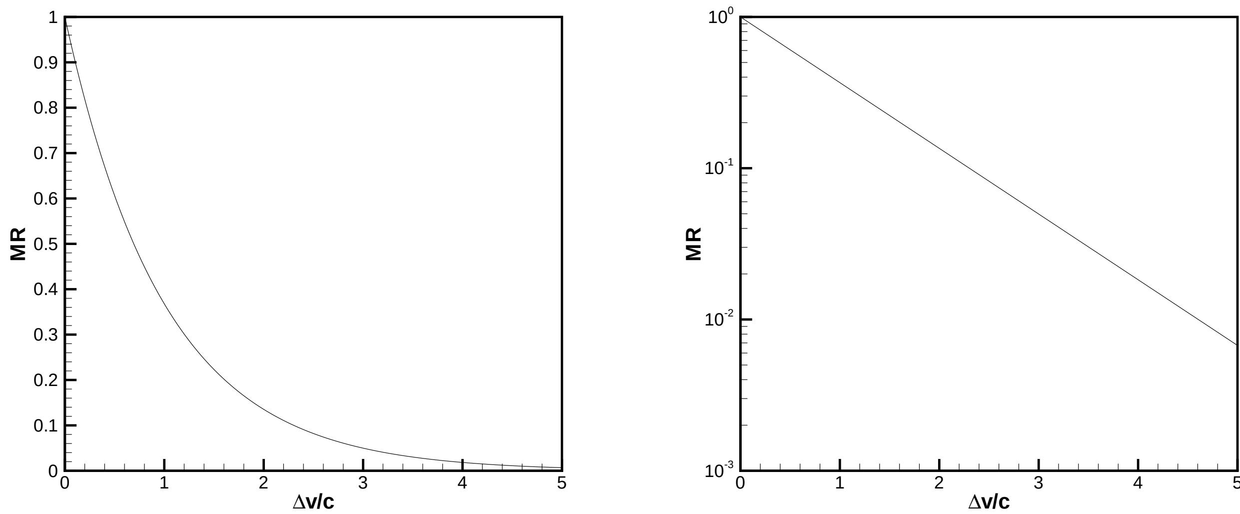


Figure 1.5: Rapporto di massa in funzione del rapporto tra Δv e velocità efficace di uscita, su scala lineare (a sinistra) e semilogaritmica (a destra).

quantità designata anche come incremento di velocità *ridotto*. L'andamento del rapporto di massa in funzione dell'incremento di velocità ridotto, secondo la (1.14), è graficato nella fig. 1.5. Tuttavia, più ancora che il rapporto di massa, interessa il rapporto di carico utile, definito come rapporto tra la massa del carico utile m_u (che si ottiene sottraendo dalla massa finale la massa m_s delle strutture) e la massa iniziale

$$\lambda = \frac{m_u}{m_0} = \frac{m_f - m_s}{m_0} = MR - \frac{m_s}{m_0} \tag{1.19}$$

dove il rapporto di massa può essere ricavato dalla (1.14). Per alti incrementi di velocità richiesti, la missione può risultare addirittura impossibile in quanto risulterebbe un carico utile $m_u < 0$, o comunque si avrebbe un carico utile molto esiguo. Questo sottolinea l'importanza di avere alte velocità efficaci di uscita c (che danno, a parità di Δv, incrementi di velocità *ridotta* più bassi, quindi

rapporti di massa più alti) e basse masse strutturali m_s. Com'è noto, le masse strutturali possono essere espresse attraverso un *coefficiente strutturale* definito come

$$\kappa_s = \frac{m_s}{m_p + m_s} \tag{1.20}$$

Osserviamo che i due requisiti desiderabili, alta c e basso κ_s, sono antitetici fra loro. Infatti per avere alte c si dovrà per esempio ricorrere a combinazioni di propellenti LOX/LH (ossigeno liquido/idrogeno liquido) che tuttavia danno luogo a serbatoi dell'idrogeno liquido molto voluminosi (a causa della bassissima densità dello LH, 71 kg/m^3, contro per esempio circa 800 kg/m^3 del cherosene, e valori simili per i combustibili *storable* come idrazina – circa 1020 kg/m^3, e derivati quali la monometilidrazina o MMH – circa 880 kg/m^3), quindi pesanti. Oppure, si dovranno adottare alte pressioni in camera p_c, le quali consentono da un lato di utilizzare un più ampio salto di pressioni in camera, per sfruttare al meglio il quale occorre però un rapporto di espansione (rapporto tra area di uscita ed area di gola dell'ugello)

$$\epsilon = \frac{A_e}{A_t} \tag{1.21}$$

più elevato, come si può vedere dalla fig. 1.6, che riporta il valore del coefficiente di spinta dell'ugello in funzione di ϵ, con parametro il rapporto tra pressione in camera p_c (che coincide con la pressione totale p_0, essendo le velocità trascurabili in camera) e la pressione ambiente. Un rapporto di espansione più elevato vuol dire ovviamente anche un ugello più pesante; inoltre, per avere p_c alte bisogna adottare spessori delle pareti della camera di combustione alti, per cui in ogni caso le masse strutturali aumentano. La relazione tra velocità efficace di uscita e coefficiente strutturale, per i differenti stadi di vari lanciatori, è riportata nelle figg. 1.7, 1.8, delle quali la prima si riferisce ai valori di c al livello del suolo, indicati con l'indice *s/l*, per *sea level*, e la seconda ai valori di c nel vuoto, indicati come *vac*, per *vacuum*, vuoto. In entrambe le figure, gli stadi propulsivi sono classificati a seconda del tipo di propellenti che adottano: criogenici (entrambi, quindi tipicamente LOX/LH); liquidi con combustibile *storable*, ossia immagazzinabile, cioè liquido a temperatura ambiente, ed ossidante criogenico (quindi tipicamente combinazioni LOX/cherosene); liquidi entrambi *storable* (tipicamente NTO/idrazina e derivati, dove NTO indica l'ossidante tetrossido d'azoto); ed infine propellenti solidi. Si può osservare in generale che i sistemi propulsivi a più alte c presentano anche κ_s più elevati. I valori del coefficiente strutturale più bassi si riscontrano per stadi utilizzanti combinazioni di propellenti liquidi *storable*, in virtù delle elevate densità dei propellenti (per l'ossidante NTO ben 1450 kg/m^3 contro i 1140 kg/m^3 del LOX; vedi sopra per il combustibile). Gli stadi che usano un combustibile

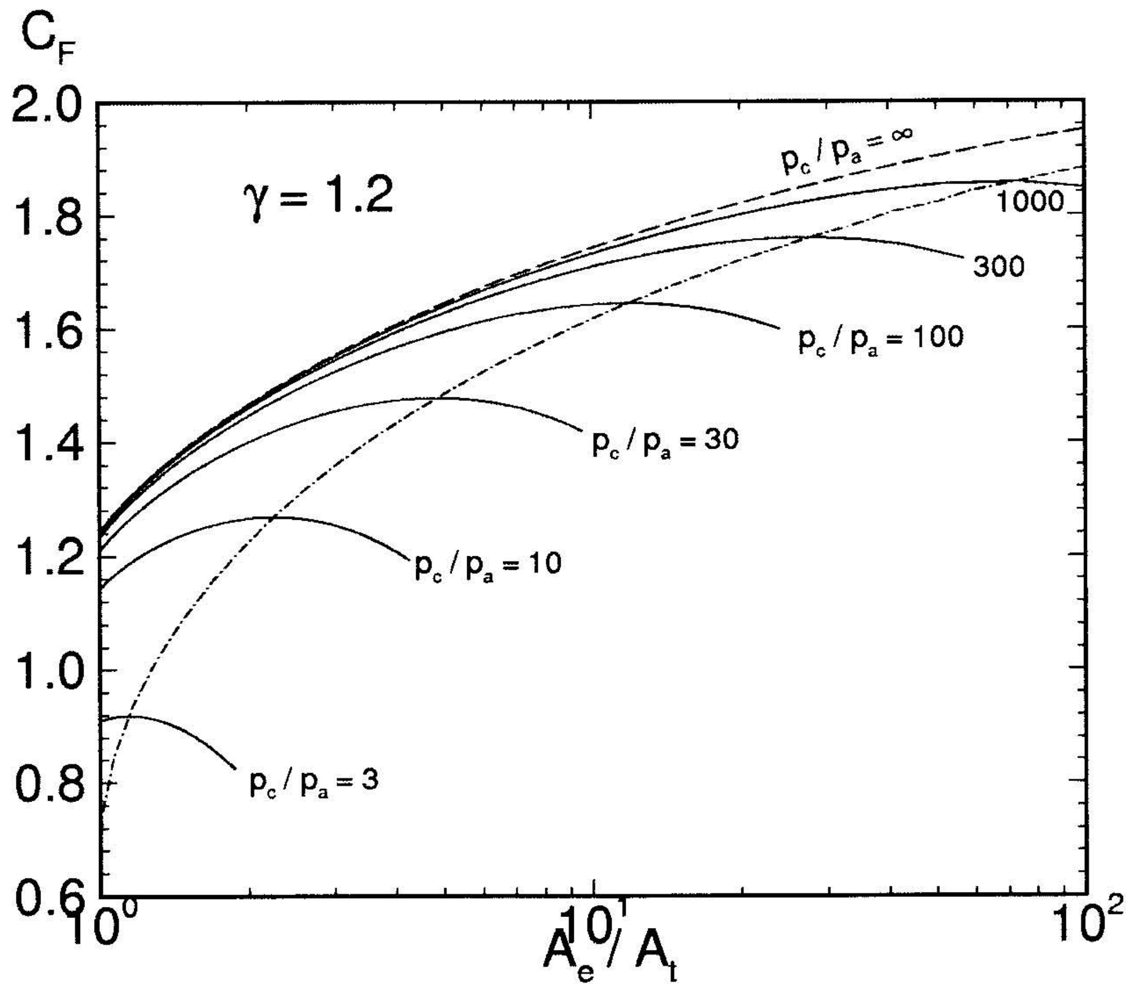


Figure 1.6: Valori del coefficiente di spinta in funzione del rapporto d'espansione dell'ugello, con parametro il rapporto tra pressione in camera e pressione ambiente; rapporto dei calori specifici 1,2.

liquido *storable* come il cherosene, e come ossidante LOX, presentano κ_s lievemente superiori a causa della minore densità dell'ossidante, però in compenso danno luogo a velocità efficaci di uscita lievemente più alte. Gli stadi a propellente solidi danno le prestazioni più basse in termini di c, ed anche valori di κ_s relativamente elevati a causa dell'inevitabile presenza di residui di propellente incombusto allo spegnimento dei motori. Un commento particolare concerne il simbolo (cerchio) in basso a destra in queste figure, relativo ai *boosters* a propellente solido dell'Ariane 4 (versione ormai non più operativa), il quale indica un coefficiente strutturale molto elevato; tuttavia, in questo caso nelle masse strutturali è incluso anche il sistema di ancoraggio di tali *boosters* al corpo principale del

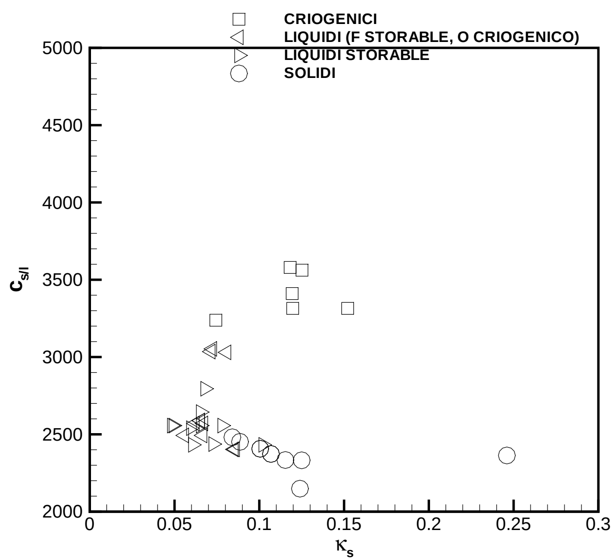


Figure 1.7: Velocità efficace di uscita al livello del suolo (in m/s) contro coefficiente strutturale per vari stadi propulsivi.

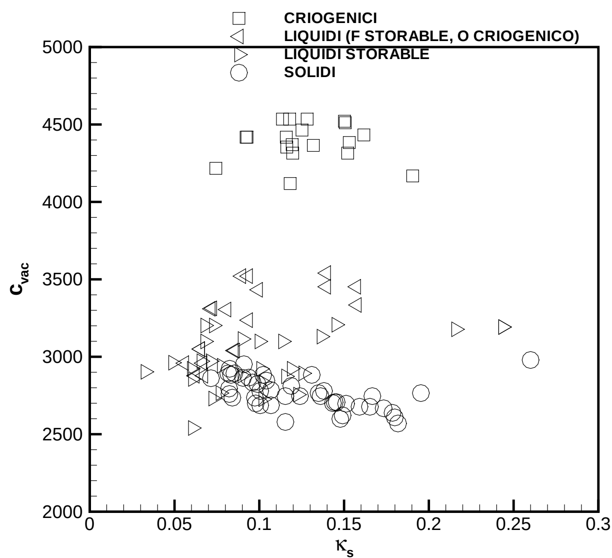


Figure 1.8: Velocità efficace di uscita nel vuoto (in m/s) contro coefficiente strutturale per vari stadi propulsivi.

razzo, che è necessariamente pesante in quanto deve trasmettere un'elevata spinta. In generale si può dire che le soluzioni migliori sono quelle che giacciono sull'inviluppo in alto a sinistra (alta c, basso κ_s) dei vari punti riportati. Anche altri punti, relativamente lontani da tale inviluppo, possono tuttavia rappresentare soluzioni valide se per esempio corrispondono ad un costo di produzione inferiore, oppure ad una maggiore affidabilità.

Un ulteriore livello di dettaglio è riportato in fig. 1.9, nella quale sono anche grossolanamente classificate le masse iniziali m_0 (in tonnellate) degli stadi. Si può osservare come stadi di massa iniziale più alta siano in generale caratterizzati da valori del coefficiente strutturale più bassi. Questo permette anche di spiegare il fatto che in fig. 1.8 per alcuni tipi di propulsori, in particolare a propellenti *storable*, i valori di κ_s spazzino un ampio campo; poiché tali propellenti sono impiegati anche per motori di taglie molto piccoli (grazie alla loro semplicità), in tal caso essi danno luogo a κ_s più elevati. Considerazioni simili valgono anche per gli stadi a propellenti solidi.

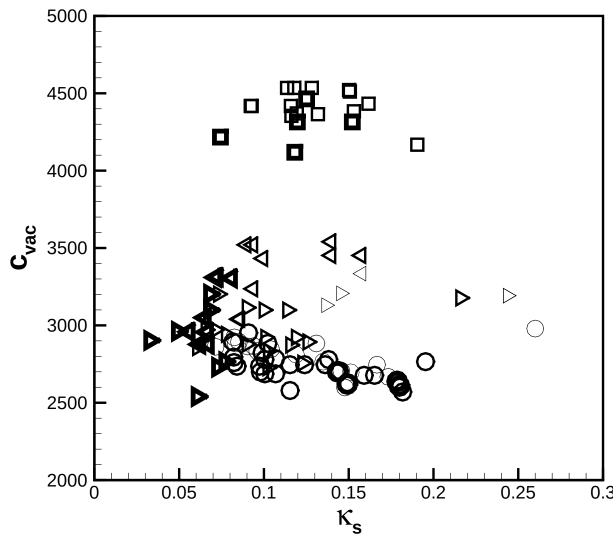


Figure 1.9: Velocità efficace di uscita nel vuoto (in m/s) contro coefficiente strutturale per vari stadi propulsivi, classificati secondo la loro massa iniziale m_0: simboli a linea sottile, $m_0 < 10$ t; linea media, $10 \leq m_0 < 100$ t; linea spessa, $m_0 > 100$ t.

1.4 Stadiazione

Come osservato a proposito della fig. 1.5, ad alte velocità ridotte $\Delta v/c$ corrispondono rapporti di massa molto bassi, e quindi necessariamente rapporti di carico utile ancora più bassi, fino a rendere

la missione del tutto impossibile. La stadiazione consente di liberarsi di masse diventate inutili, in particolare i serbatoi di propellente esauriti, evitando quindi di dover spendere energia per accelerarli fino alla velocità ultima desiderata. Possiamo distinguere due architetture limite di stadiazione (per quanto vedremo poi che se ne adottano anche altre): stadiazione in tandem e stadiazione in parallelo, vedi fig. 1.10. Nella stadiazione in tandem il lanciatore è suddiviso in più *stadi*, ognuno dei quali è dotato di un apparato propulsivo completo, che vengono accesi in sequenza, con lo stadio $i+1$ che viene acceso dopo lo spegnimento dello stadio precedente i. Al momento della separazione di ciascuno stadio vengono quindi abbandonati tanto i serbatoi che il sistema propulsivo dello stadio i. Nella stadiazione in parallelo invece il sistema propulsivo è unico per tutto il lanciatore, e vengono abbandonati solo i serbatoi esauriti. La stadiazione in tandem presenta il vantaggio che il rapporto di espansione dell'ugello dei motori dei singoli stadi può essere adattato alla pressione ambiente media che regna nel campo di quote in cui lo stadio opera, vedi anche fig. 1.6, quindi per il primo stadio si adotterà un rapporto di espansione relativamente basso perché deve operare contro una pressione ambiente elevata, per il secondo un rapporto di espansione più elevato perché deve operare contro una pressione minore, e per gli stadi che devono operare nel vuoto un rapporto di espansione molto elevato. Per contro, la stadiazione in tandem presenta lo svantaggio che il sistema propulsivo deve essere moltiplicato (ogni stadio ha il suo), con conseguente aumento delle masse strutturali, dei costi, ed una certa riduzione dell'affidabilità (aumentando il numero dei motori, aumenta la probabilità che uno di essi soffra un malfunzionamento, compromettendo in tal modo l'intera missione). La stadiazione in parallelo presenta all'opposto il vantaggio di un sistema propulsivo unico (quindi con riduzione di masse strutturali e costi, ed aumento dell'affidabilità); inoltre essendo la spinta fissata in base all'esigenza che al decollo sia (almeno) $F > m_0\, g$, si avrà che man mano che i serbatoi si svuotano, e vengono abbandonati, il razzo sarà sottoposto ad un'accelerazione sempre maggiore (certamente più elevata di quella che si ha in un lanciatore con stadiazione in tandem, dove la spinta dei motori dei singoli stadi viene calibrata in base alla massa residua da accelerare), e questa accelerazione più elevata consente di ridurre le perdite propulsive, vedi oltre. Tuttavia, queste elevate accelerazioni potrebbero anche risultare difficilmente tollerabili dal carico utile (specie se si tratta di un equipaggio umano); inoltre, i serbatoi staccabili disposti intorno al corpo centrale del razzo ne aumentano la sezione frontale, con conseguente aumento della resistenza aerodinamica.

Nel seguito tratteremo dapprima la stadiazione in tandem, e vedremo poi come le espressioni ricavate possono essere adattate per trattare anche la stadiazione in parallelo, o altri tipi di stadiazione.

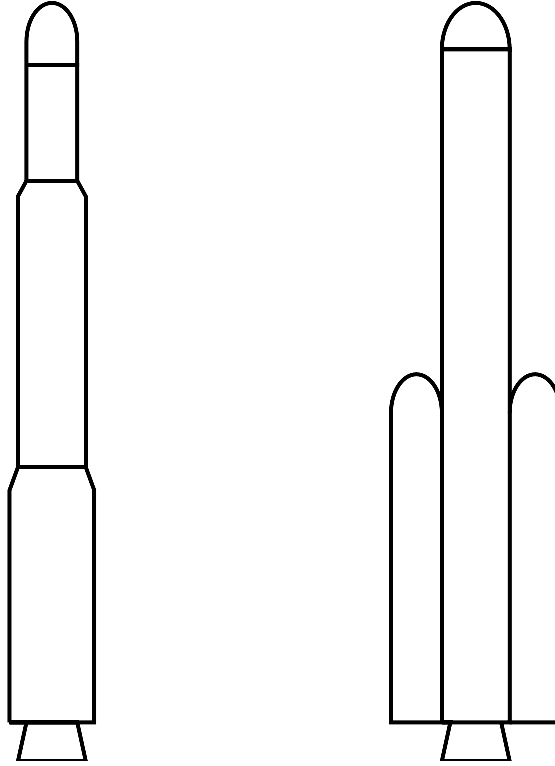


Figure 1.10: Architetture di stadiazione: in tandem (a sinistra), in parallelo (a destra).

1.4.1 Stadiazione in tandem

Introduciamo innanzitutto la definizione di *sottorazzo*, che poi estenderemo opportunamente ad altri tipi di stadiazione. Definiamo, vedi fig. 1.11, come primo sottorazzo il lanciatore completo; come secondo sottorazzo il primo sottorazzo meno il primo stadio; come terzo sottorazzo il secondo sottorazzo meno il secondo stadio, etc. Nel caso in figura di un lanciatore tristadio, potremmo poi definire come quarto sottorazzo il carico utile, che poi è anche il terzo sottorazzo meno il terzo stadio.

Chiamiamo m_{0i} la massa iniziale del sottorazzo i (prima dell'accensione dei motori dello stadio i), e m_{fi} la sua massa finale (quando i serbatoi dei propellenti dello stadio i sono completamente svuotati). Il rapporto di massa del sottorazzo i è dunque

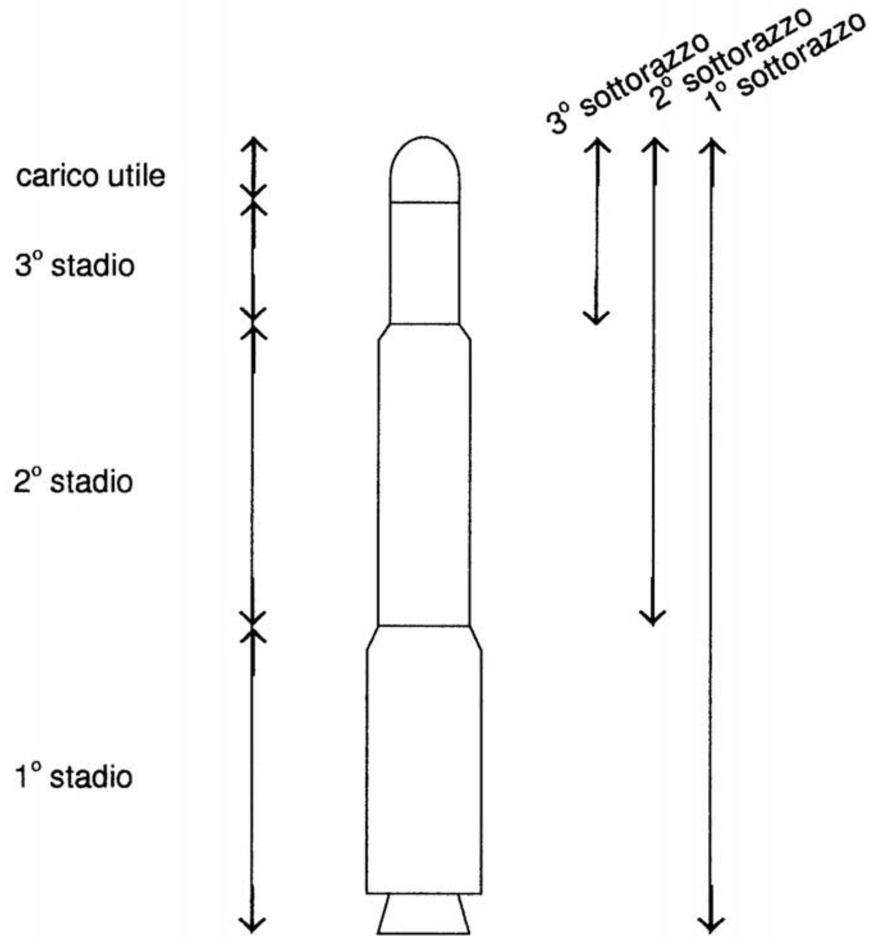


Figure 1.11: Definizione dei sottorazzi per un lanciatore tristadio in tandem.

$$MR_i = \frac{m_{fi}}{m_{0i}} \tag{1.22}$$

Il carico utile del sottorazzo i è invece indicato come m_{ui}, ed evidentemente coincide con la massa iniziale del sottorazzo successivo $i+1$, cioè con $m_{0,i+1}$. Possiamo quindi definire il rapporto di carico utile del sottorazzo i come

$$\lambda_i = \frac{m_{ui}}{m_{0i}} \tag{1.23}$$

La differenza tra m_{fi} e m_{ui} è evidentemente la massa m_{si} delle strutture dello stadio[1] i

$$m_{si} = m_{fi} - m_{ui} \tag{1.24}$$

La massa iniziale del sottorazzo i sarà la somma delle masse del carico utile del sottorazzo i, e della massa dei propellenti e delle strutture dello stadio i

$$m_{0i} = m_{ui} + m_{pi} + m_{si} \tag{1.25}$$

ed evidentemente la massa finale del sottorazzo i è la sua massa iniziale meno la massa dei propellenti dello stadio i

$$m_{fi} = m_{0i} - m_{pi} \tag{1.26}$$

Ricaviamo ora la relazione che sussiste tra il rapporto di massa ed il rapporto di carico utile del sottorazzo i. Il rapporto di massa è esprimibile come, per la (1.26)

$$M\!\!\!/R_i = \frac{m_{fi}}{m_{0i}} = \frac{m_{0i} - m_{pi}}{m_{0i}} = 1 - \frac{m_{pi}}{m_{0i}} \tag{1.27}$$

Questa consente di esprimere il rapporto tra massa di propellenti dello stadio i e massa iniziale del sottorazzo i come

$$\frac{m_{pi}}{m_{0i}} = 1 - M\!\!\!/R_i \tag{1.28}$$

Per esprimere le masse strutturali dello stadio i, possiamo adattare la definizione di coefficiente strutturale introdotto con la (1.20)

$$\kappa_{si} = \frac{m_{si}}{m_{pi} + m_{si}} \tag{1.29}$$

dalla quale quindi

[1]Si noti che i rapporti di massa e di carico utile sono relativi ai *sottorazzi* (in quanto dipendono dalla massa degli stadi superiori), mentre le masse strutturali, e quindi i coefficienti strutturali, sono relativi ai singoli *stadi*.

$$m_{si} \;=\; \kappa_{si}\,(m_{pi} \,+\, m_{si}) \tag{1.30}$$

$$m_{si} \;=\; \frac{\kappa_{si}}{1 \,-\, \kappa_{si}}\, m_{pi} \tag{1.31}$$

ed aggiungendo m_{pi} ad entrambi i membri

$$m_{si} \,+\, m_{pi} \;=\; \frac{1}{1 \,-\, \kappa_{si}}\, m_{pi} \tag{1.32}$$

Il rapporto di carico utile del sottorazzo i può allora essere espresso, esplicitando m_{ui} dalla (1.25), e ricordando infine la (1.28), come

$$\lambda_i \;=\; \frac{m_{ui}}{m_{0i}} \;=\; \frac{m_{0i} \,-\, (m_{pi} \,+\, m_{si})}{m_{0i}} \;=\; 1 \,-\, \frac{1}{1 \,-\, \kappa_{si}}\,\frac{m_{pi}}{m_{0i}} \;=\; 1 \,-\, \frac{1 \,-\, MR_i}{1 \,-\, \kappa_{si}} \tag{1.33}$$

che è la relazione cercata tra rapporto di carico utile e rapporto di massa del sottorazzo i. Essa può anche essere esplicitata per dare il rapporto di massa in funzione del rapporto di carico utile come

$$MR_i \;=\; \lambda_i\,(1 \,-\, \kappa_{si}) + \kappa_{si} \tag{1.34}$$

Applicando l'eq. di Tsiolkowsky (1.10), la (1.33) permette di esprimere il rapporto di carico utile del singolo sottorazzo in funzione del Δv_i conseguito come

$$\lambda_i \;=\; 1 \,-\, \frac{1 \,-\, \exp(-\,\Delta v_i/c)}{1 \,-\, \kappa_{si}} \tag{1.35}$$

mentre le (1.15,1.34) consentono di ricavare il Δv_i fornito dal singolo sottorazzo in funzione del suo rapporto di carico utile come

$$\Delta v_i \;=\; -\,c_i\,\log[\lambda_i\,(1 \,-\, \kappa_{si}) + \kappa_{si}] \tag{1.36}$$

Il Δv fornito dal lanciatore completo è evidentemente la somma dei Δv_i dei singoli sottorazzi

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{N} \Delta v_i = - \sum_{i=1}^{N} c_i \log[\lambda_i (1 - \kappa_{si}) + \kappa_{si}] \tag{1.37}$$

essendo N il numero degli stadi, mentre il rapporto di carico utile complessivo è il prodotto dei rapporti relativi ai singoli sottorazzi

$$\lambda = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i \tag{1.38}$$

essendo per esempio per un lanciatore tristadio

$$\lambda = \frac{m_u}{m_0} = \frac{m_{u3}}{m_{01}} = \frac{m_{u1}}{m_{01}} \frac{m_{u2}}{m_{02}} \frac{m_{u3}}{m_{03}} \tag{1.39}$$

in quanto il carico utile del lanciatore coincide con il carico utile dell'ultimo sottorazzo, e la massa iniziale dell'intero lanciatore coincide con la massa iniziale del primo sottorazzo; valgono poi le eguaglianze $m_{u1} = m_{02}$, $m_{u2} = m_{03}$ poiché, come detto, il carico utile del sottorazzo i coincide con la massa iniziale del sottorazzo successivo.

Vediamo ora come ripartire il Δv complessivamente richiesto al lanciatore in modo tale da conseguire il massimo rapporto di carico utile. Facciamo per semplicità riferimento ad un lanciatore bistadio, e poniamoci nel caso particolare in cui la velocità efficace di uscita del primo stadio (che assumiamo costante per poter applicare l'eq. di Tsiolkowsky) sia uguale a quella del secondo stadio (ipotesi in realtà opinabile perché verosimilmente il secondo stadio, dovendo lavorare contro una pressione esterna minore, avrà prestazioni lievemente superiori a quelle del primo stadio), ed ancora che il coefficiente strutturale del primo stadio sia uguale a quello del secondo stadio (assunzione anche questa opinabile, vedi fig. 1.9). Fissato quindi il Δv complessivo, cerchiamo il valore di Δv_1 che massimizza λ; evidentemente il Δv_2 del secondo sottorazzo sarà $\Delta v_2 = \Delta v - \Delta v_1$. Il rapporto di carico utile complessivo può quindi essere espresso, secondo le (1.38, 1.35), come

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 = \left\{ 1 - \frac{1 - \exp(-\Delta v_1/c)}{1 - \kappa_s} \right\} \left\{ 1 - \frac{1 - \exp\left[-(\Delta v - \Delta v_1)/c\right]}{1 - \kappa_s} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(1 - \kappa_s)^2} \left\{ -\kappa_s + \exp(-\Delta v_1/c) \right\} \left\{ -\kappa_s + \exp\left[-(\Delta v - \Delta v_1)/c\right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{(1 - \kappa_s)^2} \left\{ {\kappa_s}^2 + \exp\left(-\frac{\Delta v}{c} \right) - \kappa_s \left[\exp\left(-\frac{\Delta v_1}{c} \right) + \exp\left(-\frac{\Delta v - \Delta v_1}{c} \right) \right] \right\} \tag{1.40}$$

Derivando rispetto a Δv_1 si ha

$$\frac{d\lambda}{d\Delta v_1} = \frac{\kappa_s}{(1 - \kappa_s)^2} \left[\frac{1}{c} \exp\left(-\frac{\Delta v_1}{c} \right) - \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{\Delta v - \Delta v_1}{c} \right) \right] \tag{1.41}$$

ed eguagliando la derivata a zero per trovare il massimo si ottiene $\Delta v_1 = \Delta v/2$, da cui $M\!R_1 = M\!R_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$. Più in generale, si ha che sotto le ipotesi citate (velocità efficace di uscita e coefficiente strutturale uguali per tutti gli stadi) la condizione di massimo del rapporto di carico utile si traduce in una *equiripartizione* del Δv tra i diversi sottorazzi:

$$\Delta v_i = \frac{\Delta v}{N} \tag{1.42}$$

Sottoliniamo ancora che tale risultato è valido strettamente soltanto sotto le ipotesi che la velocità efficace d'uscita sia uguale per tutti gli stadi (oltre che costante durante l'operazione di ciascuno stadio), e che il coefficiente strutturale sia uguale per tutti gli stadi. Come detto, in realtà la velocità efficace d'uscita sarà in generale più bassa per il primo stadio e più alta per l'ultimo; il coefficiente strutturale sarà poi in generale più basso per il primo stadio, sia per un fattore di scala, sia perché l'ugello, avendo un minore rapporto d'espansione, peserà di meno, mentre esso sarà più elevato per gli stadi superiori (questo ammesso che i diversi stadi adottino tutti la stessa soluzione propulsiva, siano quindi p. es. tutti a propellente solido, oppure tutti a propellenti liquidi *storable*, etc.). Inoltre, il lanciatore potrebbe adottare soluzioni propulsive diverse per i diversi stadi, con conseguenti diverse velocità efficaci d'uscita, nonché diversi valori dei coefficienti strutturali.

Vediamo ora la sensibilità del rapporto di carico utile alla ripartizione del Δv. Sempre nel caso di un lanciatore bistadio, ipotizziamo un incremento di velocità ridotto richiesto $\Delta v/c = 3$, ed un

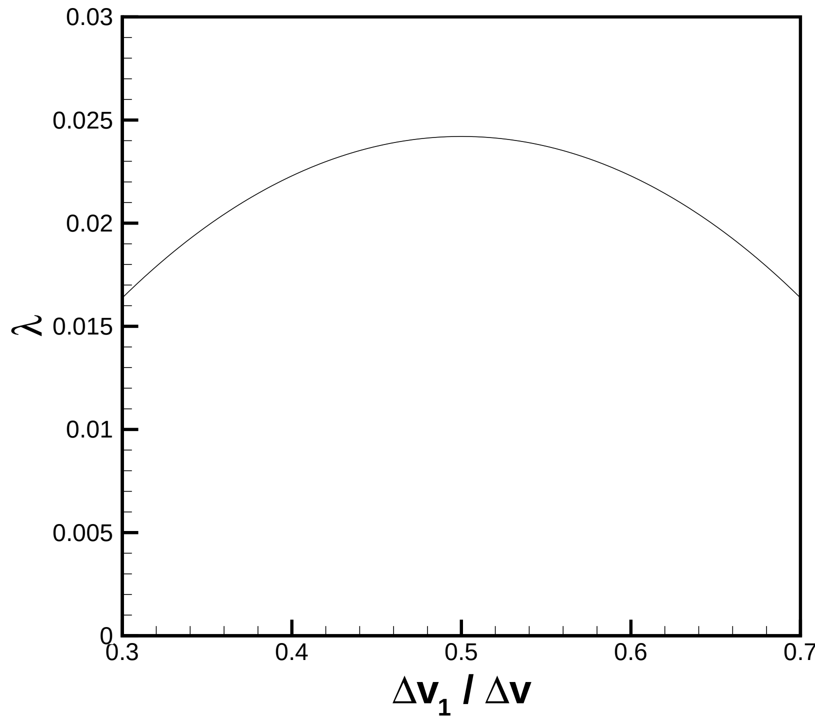


Figure 1.12: Rapporto di carico utile di un lanciatore bistadio in funzione della frazione del Δv assegnata al primo stadio.

coefficiente strutturale $\kappa_s = 0{,}08$ per entrambi gli stadi. La fig. 1.12 riporta il rapporto di carico utile complessivo del lanciatore in funzione del rapporto $\Delta v_1/\Delta v$ che esprime la frazione del Δv complessivo assegnata al primo stadio. Il massimo di λ si ha ovviamente per equiripartizione del Δv tra i due stadi, cioè $\Delta v_1/\Delta v = 0{,}5$, ma si può vedere che in prossimità del massimo la curva risulta abbastanza piatta, per cui anche una ripartizione del Δv lievemente diversa da quella ottimale non penalizza eccessivamente il carico utile. Questa considerazione riveste una certa importanza nell'evoluzione delle 'famiglie' di lanciatori, alcune delle quali sono mostrate in fig. 1.13. Si può vedere come in generale da una versione di base del lanciatore vengono poi derivate versioni più potenti per poter soddisfare una più ampia gamma di valori della massa del carico utile, mediante l'aggiunta per esempio di un certo numero di *boosters* ausiliari. Per esempio, i lanciatori Ariane 4 (ora sostituiti da Ariane 5) prevedevano le seguenti versioni, elencate in ordine crescente di capacità di lancio (massa del carico utile iniettabile in orbita):

- Ariane 40, versione di base senza *boosters* ausiliari;

- Ariane 42P, costituito dalla versione base più due *boosters* ausiliari a propellenti solidi;
- Ariane 42L, costituito dalla versione base più due *boosters* ausiliari a propellenti liquidi;
- Ariane 44P, costituito dalla versione base più quattro *boosters* ausiliari a propellenti solidi;
- Ariane 44LP, costituito dalla versione base più due *boosters* ausiliari a propellenti solidi, e due *boosters* ausiliari a propellenti liquidi;
- Ariane 44L, costituito dalla versione base più quattro *boosters* ausiliari a propellenti liquidi.

Evidentemente il criterio ottimale di ripartizione del Δv tra i vari sottorazzi non sarà in genere soddisfatto per tutte le versioni, ma la pratica di incrementare la capacità di un lanciatore aggiungendovi un vario numero di *boosters* ausiliari consente di contenere i costi di sviluppo rispetto all'ipotesi alternativa di riprogettare completamente il lanciatore per soddisfare la condizione di ripartizione ottimale del Δv. Considerazioni analoghe valgono per le altre famiglie di lanciatori mostrate in fig. 1.13.

Vediamo ora di quantificare il rapporto di carico utile complessivo di un lanciatore in funzione del Δv ridotto richiesto (cioè $\Delta v/c$) e del numero degli stadi N adottato, sotto le seguenti ipotesi semplificative: velocità efficace di uscita c_i uguale per tutti gli stadi, coefficiente strutturale $\kappa_{si} = 0{,}1$ uguale per tutti gli stadi, Δv complessivo equiripartito tra i vari sottorazzi secondo la (1.42). Questo rapporto di carico utile complessivo si ottiene grazie alle (1.35,1.38), ed è mostrato in fig. 1.14. Si noti che in questa figura l'asse verticale è logaritmico, a differenza della fig. 1.5. Si può osservare come il rapporto di carico utile complessivo diminuisca in ogni caso all'aumentare dell'incremento di velocità ridotto richiesto, ed in particolare che, fissato il numero N degli stadi, esso sostanzialmente crolli oltre un certo valore di $\Delta v/c$ (per esempio circa 2 per $N = 1$). Inoltre, si osserva che il carico utile cresce costantemente all'aumentare del numero degli stadi; il vantaggio è minimo per bassi valori di $\Delta v/c$, ma diventa importante per alti valori. Questo indica che per lanciatori che devono fornire bassi incrementi di velocità ridotti si tende ad adottare un numero ridotto di stadi, mentre per lanciatori che devono fornire alti incrementi di velocità ridotti si tenderà ad un alto valore di N. Il numero ottimale di stadi da utilizzare va pesato contro l'aumento dei costi associato con la moltiplicazione del numero degli apparati propulsivi, e la diminuzione dell'affidabilità che si ha all'aumentare di N (in quanto aumentando il numero degli stadi, aumenta la possibilità che uno di essi vada incontro ad un malfunzionamento). Va poi considerato che aumentando il numero degli stadi diminuisce la taglia dei singoli stadi, per cui bisogna aspettarsi che i coefficienti strutturali aumentino, vedi commento alla fig. 1.9. In fig. 1.14 è anche mostrata la curva limite per numero di stadi infinito, alla quale per quanto detto corrisponde il massimo carico utile. Si comprende facilmente tuttavia che quest'opzione non è avvicinabile, in quanto essa implicherebbe stadi di massa infinitesima. Mentre è

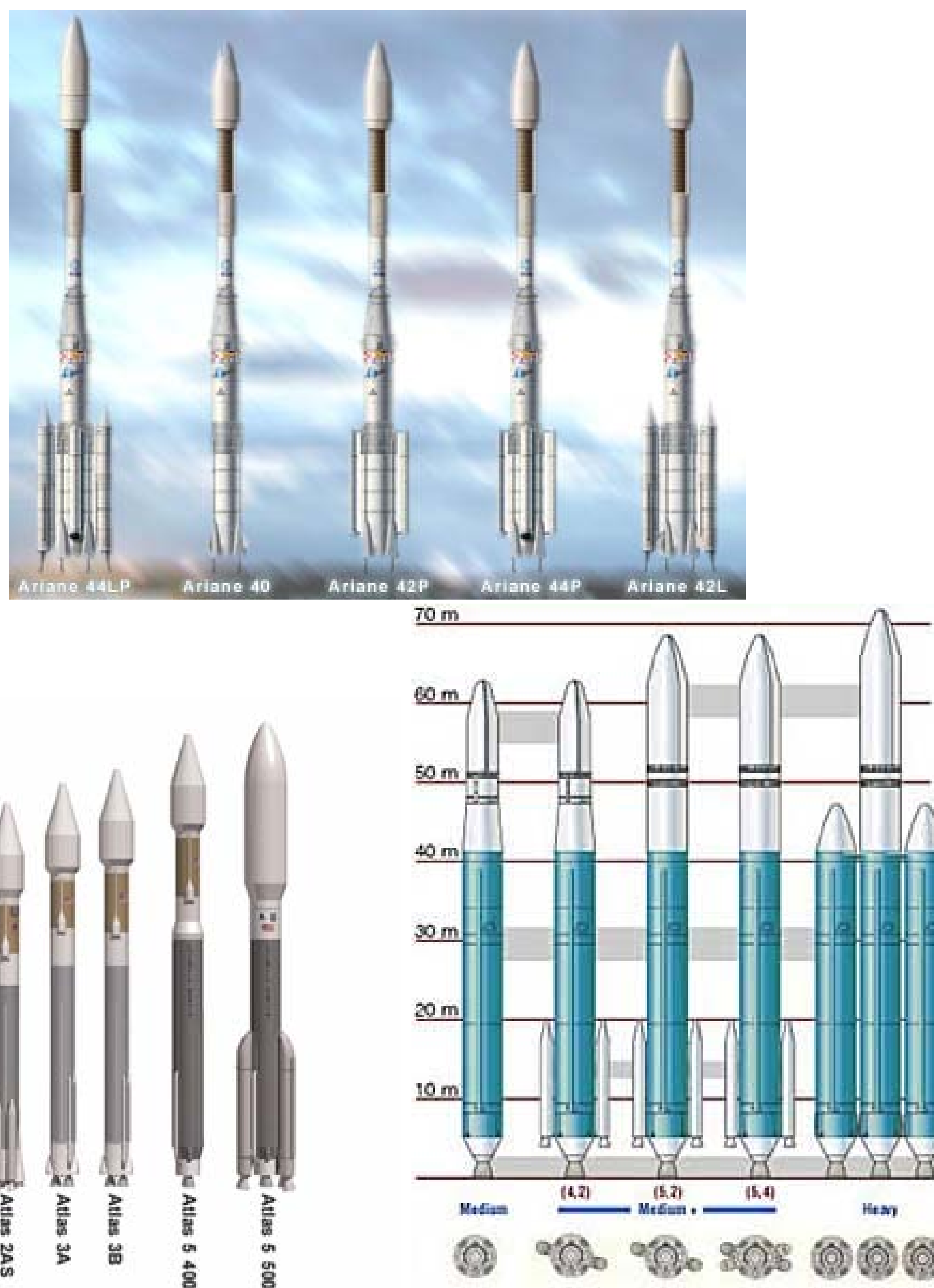


Figure 1.13: Famiglie dei lanciatori Ariane 4 (sopra), Atlas (sotto a sinistra), Delta 4 (sotto a destra), da [4, 5, 6].

ragionevole assumere che, per stadi di massa molto piccola, che quindi devono contenere una massa molto piccola di propellenti, la massa dei serbatoi sia anch'essa molto piccola, la massa del sistema propulsivo invece non tenderà a zero all'aumentare del numero degli stadi, perché i motori devono in ogni caso fornire una spinta finita, ed hanno quindi massa finita. Quindi l'ipotesi di coefficente strutturale costante non è applicabile al caso $N \to \infty$, o comunque elevato.

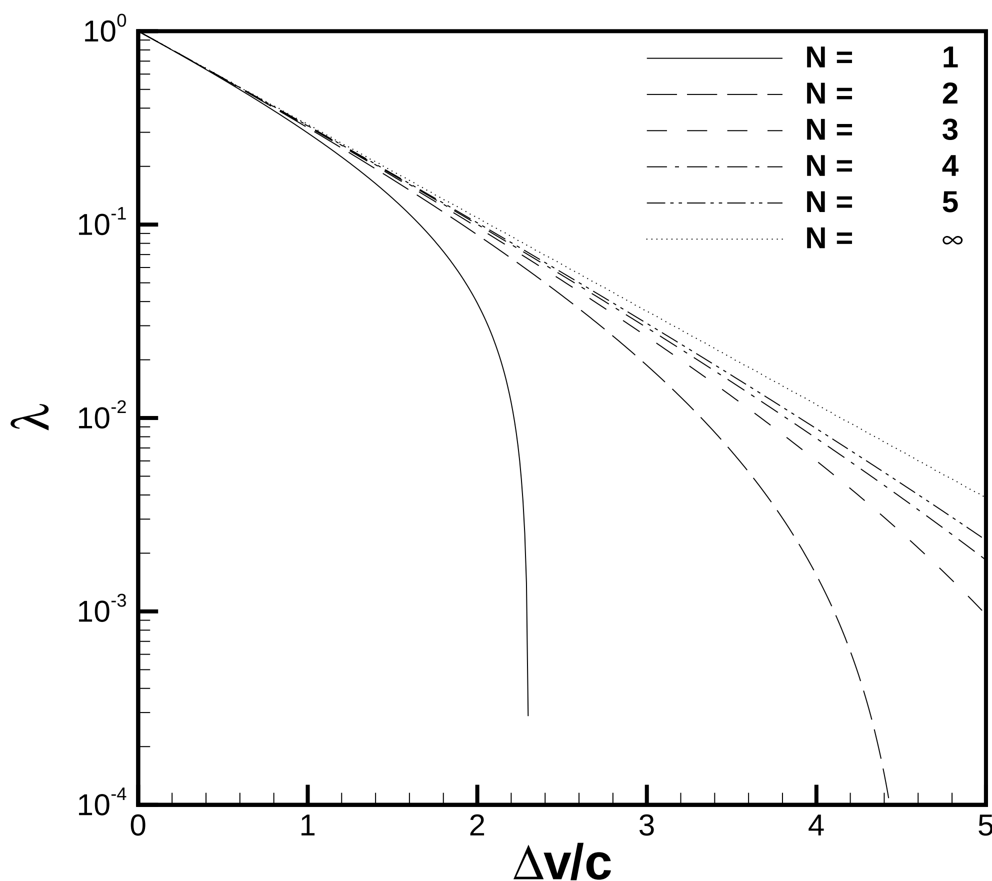


Figure 1.14: Rapporti di carico utile in funzione dell'incremento di velocità ridotto, con il numero N degli stadi come parametro (descrizione delle masse strutturali in termini del solo indice κ_{si}).

Una migliore rappresentazione delle masse strutturali si può avere descrivendo in modo differenziato le masse strutturali dei serbatoi e dei motori. Scindiamo la massa delle strutture dello stadio i in due componenti, una che dipende dalla massa di propellente caricato a bordo (quindi relativa principalmente ai serbatoi, per cui la indichiamo con l'indice t, per *tank*, serbatoio), ed una indipendente dalla

massa dei propellenti (quindi principalmente relativa ai motori, per cui la indichiamo con l'indice e, per *engine*, motore)

$$m_{si} \; = \; m_{ti} \, + \, m_{ei} \tag{1.43}$$

La prima componente la assumiamo proporzionale alla massa dei propellenti caricati nello stadio, secondo un coefficiente di proporzionalità κ_{ti}

$$m_{ti} \; = \; \kappa_{ti} \, m_{pi} \tag{1.44}$$

mentre la seconda si ottiene facilmente in base alla spinta F_i dei motori dello stadio i, noto il loro rapporto spinta/peso, che indichiamo come $(F/W)_i$ (per esempio, per endoreattori a propellenti liquidi, esso assume tipicamente valori compresi tra 50 e 100). Ovviamente la massa del motore è il loro peso diviso l'accelerazione di gravità; assumiamo il peso definito in base all'accelerazione standard al livello del suolo. Si ha quindi

$$m_{ei} \; = \; \frac{1}{g_0} \, \frac{F_i}{(F/W)_i} \tag{1.45}$$

La massa dei propellenti che compare in (1.44) può essere espressa tramite le (1.28,1.14), permettendo quindi di esprimere la massa dei serbatoi come

$$m_{ti} \; = \; \kappa_{ti} \, (1 \, - \, \mathit{MR}_i) \; m_{0i} \; = \; \kappa_{ti} \, [1 \, - \, \exp(-\Delta v_i / c_i)] \; m_{0i} \tag{1.46}$$

Per quanto riguarda la massa dei motori, osserviamo che la spinta F_i che compare a numeratore al secondo membro della (1.45) può essere espressa come prodotto della massa iniziale del sottorazzo m_{0i} per la sua accelerazione all'istante iniziale a_{0i} (cioè all'accensione del motore), la quale ultima può anche essere espressa in g, cioè in multipli dell'accelerazione standard al livello del suolo, introducendo un fattore d'accelerazione all'istante iniziale, per il sottorazzo i, come $f_{a0,i} = a_{0i}/g_0$:

$$m_{ei} \; = \; \frac{a_{0i}}{g_0} \, \frac{m_{0i}}{(F/W)_i} \; = \; f_{a0,i} \, \frac{m_{0i}}{(F/W)_i} \tag{1.47}$$

La massa complessiva delle strutture dello stadio i può pertanto essere espressa come

$$m_{si} = m_{0i} \left[\kappa_{ti} \, (1 - MR_i) + \frac{f_{a0,i}}{(F/W)_i} \right] \tag{1.48}$$

dalla quale si può ricavare una relazione tra λ_i e MR_i che, in questa descrizione delle masse strutturali basata su due indici, sostituisce la (1.33):

$$\lambda_i = \frac{m_{fi} - m_{si}}{m_{0i}} = MR_i - \left[\kappa_{ti} \, (1 - MR_i) + \frac{f_{a0,i}}{(F/W)_i} \right] =$$

$$= MR_i \, (1 + \kappa_{ti}) - \kappa_{ti} - \frac{f_{a0,i}}{(F/W)_i} \tag{1.49}$$

Esplicitando MR_i da questa si trova l'analoga della (1.34):

$$MR_i = \frac{\lambda_i + \kappa_{ti} + \dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}}{1 + \kappa_{ti}} \tag{1.50}$$

Le relazioni testè ricavate permettono di ricavare il coefficiente strutturale complessivo dello stadio (1.29) sulla base dei due parametri κ_{ti} e $(F/W)_i$; occorre per questo esprimere la massa delle strutture secondo la (1.48), e la massa di propellente ancora secondo la (1.28)

$$\kappa_{si} = \frac{\kappa_{ti} \, (1 - MR_i) + \dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}}{(1 + \kappa_{ti}) \, (1 - MR_i) + \dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}} \tag{1.51}$$

Si osserva quindi che il coefficiente strutturale, in questa più dettagliata descrizione delle masse strutturali, risulta in realtà legato al rapporto di massa del sottorazzo. Analizziamo due casi limite, quello di rapporto di massa del sottorazzo che tende a zero

$$\lim_{MR_i \to 0} \kappa_{si} = \frac{\kappa_{ti} + \dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}}{1 + \kappa_{ti} + \dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}} = 1 - \frac{1}{1 + \kappa_{ti} + \dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}} \tag{1.52}$$

e quello di rapporto di massa che tende ad uno:

$$\lim_{MR_i \to 1} \kappa_{si} = \frac{\dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}}{\dfrac{f_{a0,i}}{(F/W)_i}} = 1 \tag{1.53}$$

Dalla (1.52) si evince che il coefficiente strutturale, nel caso in cui $MR_i \to 0$, cioè lo stadio è costituito in massima parte di propellenti, aumenta al crescere dell'accelerazione iniziale (perché sono necessari motori più potenti, quindi più pesanti), e diminuisce invece all'aumentare del rapporto spinta/peso del motore (perché ovviamente, a parità di accelerazione iniziale, quindi di spinta, questo aumento porta a motori più leggeri). Inoltre, κ_{si} aumenta ovviamente al crescere di κ_{ti} (coefficiente di proporzionalità tra massa dei serbatoi e dei propellenti). Nel caso invece in cui $MR_i \to 1$, ovverosia lo stadio è costituito in minima parte da propellenti (situazione che, per Δv complessivo fissata, si avvicina a quella ipotetica di un lanciatore con numero infinito di stadi), la (1.53) mostra che il coefficiente strutturale tende all'unità, ovvero lo stadio sarà costituito pressoché interamente dal motore, mentre i serbatoi avranno una massa trascurabile (come d'altronde è trascurabile la massa dei propellenti, sotto l'ipotesi in questione). Riprendendo il caso generale, ed esprimendo il rapporto di massa secondo l'espressone a due indici (1.49) attraverso l'eq. di Tsiolkowsky, il rapporto di carico utile può essere esplicitato rispetto all'incremento di velocità richiesto al sottorazzo i come

$$\lambda_i = (1 + \kappa_{ti}) \exp\left(-\frac{\Delta v_i}{c_i}\right) - \kappa_{ti} - \frac{f_{a0,i}}{(F/W)_i} \tag{1.54}$$

Analizziamo ora, in modo analogo a quanto era stato visto nella fig. 1.14 per il caso di masse strutturali tenute in conto tramite il singolo indice κ_{si} (posto pari a 0,1 nella figura citata), la

dipendenza del rapporto di carico utile dall'incremento di velocità ridotto, con ancora il numero degli stadi come parametro, nel caso in cui le masse strutturali siano descritte tramite i due indici testè introdotti, κ_{ti} e $(F/W)_i$. Assumiamo, per tutti gli stadi, κ_{ti} = 0,075, $(F/W)_i$ = 50, $f_{a0,i}$ = 1,25; si può vedere dalla (1.51) che questa scelta porta a valori di κ_{si} che spaziano tra 0,093 e 0,111 al variare di MR_i tra 0,1 e 0,5, quindi grosso modo vicini al valore 0,1 assunto nella precedente fig. 1.14. I risultati, riportati in fig. 1.15, per quanto a prima vista molto simili ai precedenti, mostrano tuttavia alcune importanti differenze. Innanzitutto si può osservare che per incrementi di velocità ridotta bassi, diciamo inferiori ad uno, il rapporto di carico utile decresce all'aumentare del numero degli stadi, anziché aumentare come in fig. 1.14; questo perché un aumento del numero degli stadi comporta un incremento della massa dei motori, per cui per $\Delta v/c$ bassi, caso in cui le masse dei serbatoi sono relativamente meno importanti (e quindi il vantaggio di liberarsi di esse, aumentando N, è meno sensibile), si ha l'osservato peggioramento di λ. Inoltre, si può ancora notare che, a differenza della fig. 1.14, non sia riportata la curva, peraltro teorica, per $N = \infty$; questo perché aumentando N aumenta anche il numero, e quindi la massa, dei motori, sino a rendere il rapporto di carico utile prossimo a zero.

Più in generale possiamo dire che per ogni valore del rapporto di velocità ridotto, la presente trattazione individua un numero di stadi ottimale N_{opt} che massimizza il rapporto di carico utile, come indicato in fig. 1.16 per due valori del fattore di accelerazione iniziale.

Occorre comunque osservare che, mentre la fig. 1.15 riporta λ in funzione di $\Delta v/c$, il Δv stesso a sua volta dipende da come è progettato il sistema propulsivo; in particolare, aumentare il livello di accelerazione iniziale $f_{a0,i}$ porta a contenere le perdite propulsive, come sarà mostrato fra breve, per cui il Δv efficace richiesto diminuisce in qualche misura. La fig. 1.17 mostra invece, sullo stesso grafico, i fattori di accelerazione *finale*, ossia l'accelerazione finale allo spegnimento (*burnout*) dei motori, in unità di g. Questa è data da

$$f_{af,i} = \frac{F_i}{g_0\, m_{fi}} = \frac{F_i}{g_0\, m_{0i}} \frac{m_{0i}}{m_{fi}} = \frac{f_{a0,i}}{MR_i} \tag{1.55}$$

Si può osservare come aumentare il numero degli stadi porta a ridurre fortemente le accelerazioni finali, in quanto ciò conduce a valori del rapporto di massa di ciascun sottorazzo più alti, essendo minori i Δv_i ad essi richiesti.

Per illustrare l'impatto che il livello di accelerazione iniziale, ossia la spinta dei motori, ed il numero degli stadi hanno su una missione reale, consideriamo il caso di un razzo in moto verticale, sottoposto alle sole forze di spinta e gravità (assumiamo quindi trascurabili le forze aerodinamiche). In

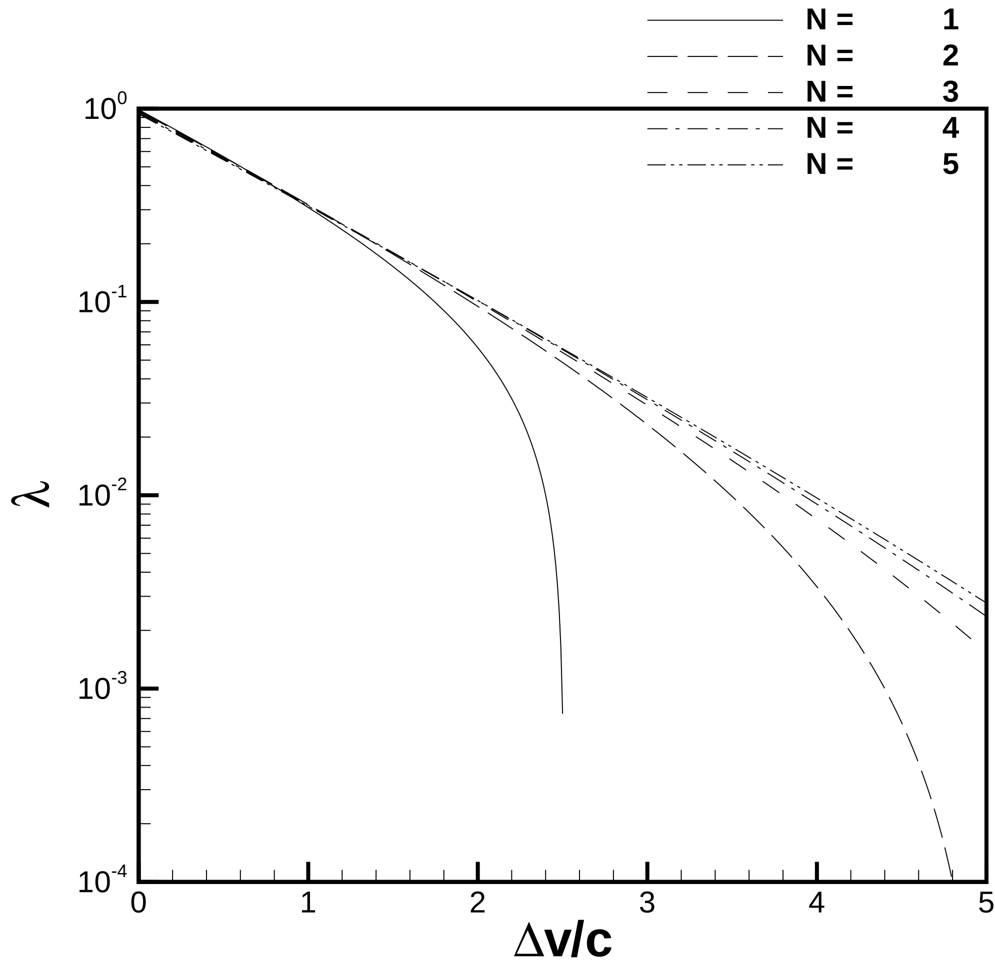


Figure 1.15: Rapporti di carico utile in funzione dell'incremento di velocità ridotto, con il numero N degli stadi come parametro [descrizione delle masse strutturali in termini dei due indici κ_{ti} e $(F/W)_i$].

questo caso quindi non siamo più sotto le ipotesi dell'equazione di Tsiolkowsky, ed occorre riscrivere l'equazione della quantità di moto (1.6), applicata al sistema costituito dal razzo più la massa di propellenti espulsa nel tempo dt, facendo figurare esplicitamente la forza peso (diretta in senso opposto al moto) tra le forze esterne (ricordiamo che la spinta è una forza interna al sistema considerato)

$$-m\,g \;=\; \frac{dq}{dt} \qquad (1.56)$$

da cui

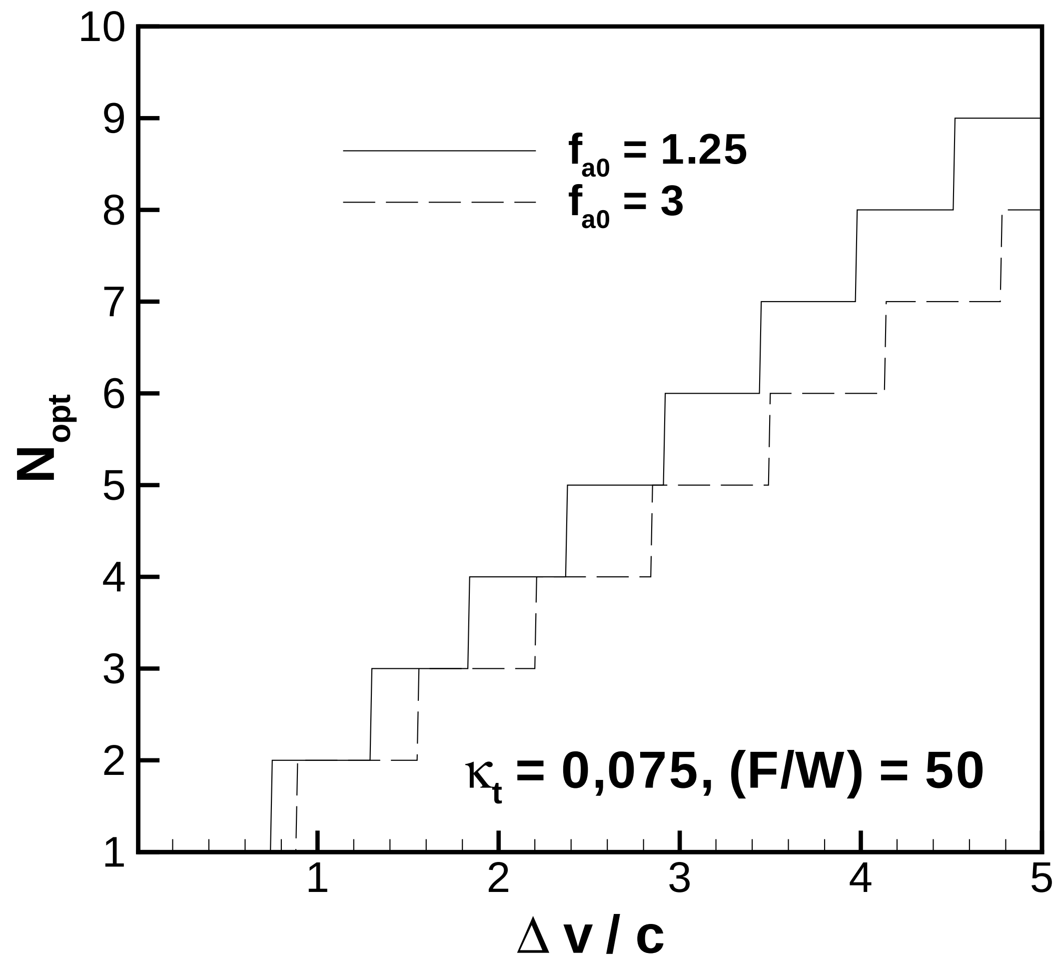


Figure 1.16: Numero di stadi ottimo in funzione dell'incremento di velocità ridotto, con il fattore di accelerazione iniziale come parametro.

$$-m\, g\, dt \;=\; dq \tag{1.57}$$

e, ricordando le (1.7,1.8)

$$-m\, g\, dt \;=\; (m \,+\, dm)\,(v \,+\, dv) + (-\,dm)\,(v \,-\, c) \,-\, m\, v \tag{1.58}$$

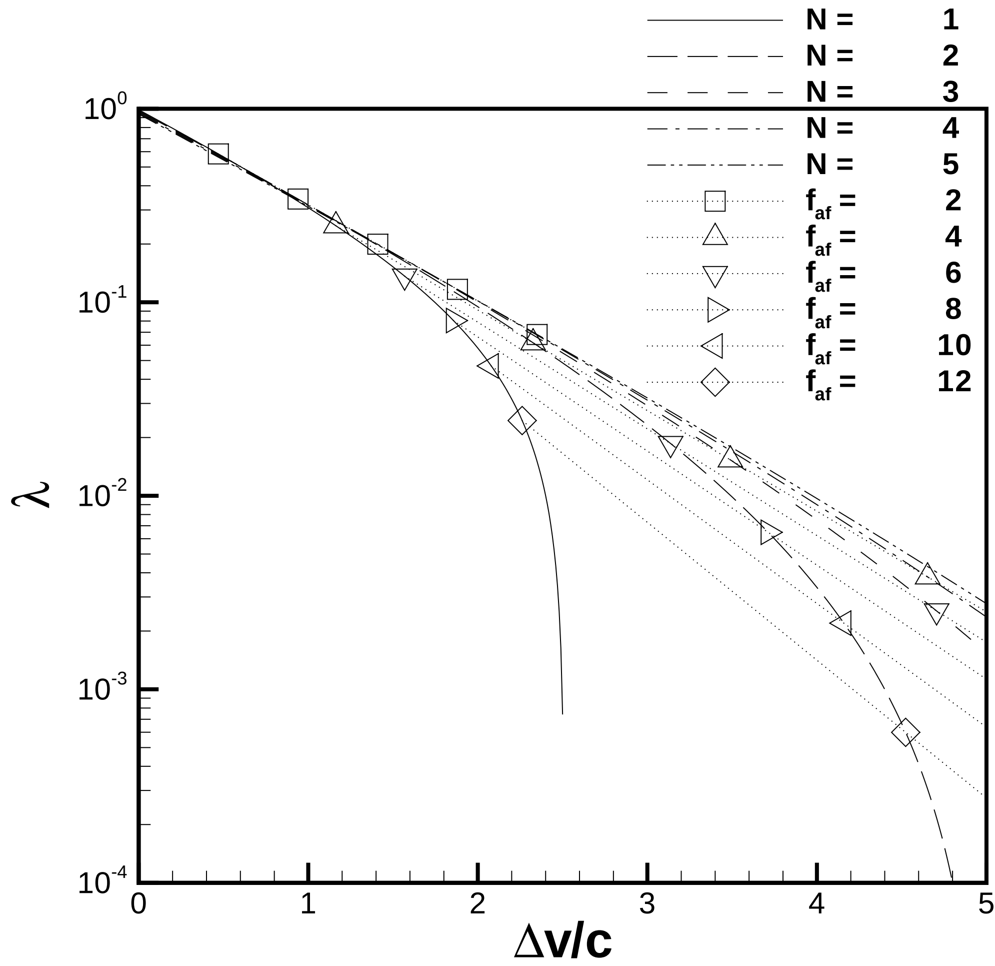


Figure 1.17: Rapporti di carico utile in funzione dell'incremento di velocità ridotto, e fattore di accelerazione al burnout, con il numero N degli stadi come parametro [per κ_{ti} = 0,075, $(F/W)_i$ = 50, $f_{a0,i}$ = 1,25].

$$m\,dv \;=\; -\,c\,dm \;-\; m\,g\,dt \tag{1.59}$$

Possiamo quindi esplicitare la variazione di velocità nel tempo dt

$$dv \;=\; -\,c\,\frac{dm}{m} \;-\; g\,dt \tag{1.60}$$

Il dt può essere espresso tramite la massa espulsa in tale tempuscolo come

$$F = c\dot{m} = -c\,\frac{dm}{dt} \tag{1.61}$$

$$dt = -\frac{c}{F}\,dm \tag{1.62}$$

per cui infine la variazione di velocità risulta

$$dv = -c\,\frac{dm}{m} + g\,\frac{c}{F}\,dm \tag{1.63}$$

ed integrando tra l'istante iniziale 0 e l'istante finale f (sempre sotto l'ipotesi di $c = \text{cost}$)

$$\Delta v = -c\,\log\frac{m_f}{m_0} + g\,\frac{c}{F}\,(m_f - m_0) = -c\,\log\frac{m_f}{m_0} + c\,\frac{g\,m_0}{F}\left(\frac{m_f}{m_0} - 1\right) =$$

$$= -c\left[\log MR + \frac{1}{f_{a0}}\,(1 - MR)\right] \tag{1.64}$$

essendo $F/(g\,m_0)$ l'accelerazione iniziale in g. Quanto detto può essere immediatamente esteso al caso di un lanciatore composto di più sottorazzi

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{N}\Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N} c_i\left[\log MR_i + \frac{1}{f_{a0,i}}\,(1 - MR_i)\right] \tag{1.65}$$

Si vede quindi che al Δv ricavato sotto le ipotesi dell'eq. di Tsiolkowsky va sottratto un termine che rappresenta le perdite propulsive gravitazionali; per un lanciatore composto di N stadi queste perdite sono pertanto esprimibili come

$$\Delta v_{grav} \; = \; \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{f_{a0,i}} \, (1 \; - \; MR_i) \tag{1.66}$$

La fig. 1.18 riporta tali perdite in funzione del fattore di accelerazione iniziale, con il numero degli stadi come parametro (fissati i valori di $\Delta v/c$ complessivo richiesto al lanciatore, κ_{ti}, $(F/W)_i$, questi ultimi due assunti uguali per tutti gli stadi). Si vede che le perdite diminuiscono aumentando l'accelerazione iniziale, perché aumentando f_{a0} una minore frazione della spinta deve essere utilizzata per controbilanciare la forza di gravità.

La fig. 1.19 riporta invece il carico utile per questo stesso caso, assumendo due differenti valori del rapporto spinta/peso dei motori. Si può vedere che esiste una coppia di valori di $f_{a0,i}$ e N che massimizza il rapporto di carico utile. In particolare, si osservi che il massimo si ha per un valore di N pari a 4; aumentare ulteriormente il numero degli stadi porta ad una penalizzazione per l'accresciuta massa dei motori. Il rapporto di carico utile ovviamente cresce all'aumentare del rapporto spinta/peso dei motori (che diventano cioè meno pesanti). Si noti tuttavia che, come già osservato, il livello di accelerazione non può essere sempre scelto a piacere, ma può essere vincolato dalle massime sollecitazioni tollerabili dal carico utile al *burnout*; in ogni caso, fissato ad esempio $f_{af,i}$, si può identificare il numero di stadi ottimale.

1.4.2 Estensione ad altri tipi di stadiazione

Vediamo ora come le formule ricavate per la stadiazione in tandem possono essere applicate anche ad altri tipi di stadiazione, attraverso un'opportuna identificazione dei sottorazzi che compongono il lanciatore, e conseguenti appropriate definizioni della velocità efficace di uscita e del coefficiente strutturale di ciascuno stadio.

Stadiazione in parallelo

Consideriamo per semplicità il caso di uno stadio centrale (che chiamiamo *core stage*, ed indichiamo con l'indice *cs*), con k serbatoi esterni staccabili (indice *et*, per *external tank*), in cui tutti questi k serbatoi si svuotano simultaneamente, e sono abbandonati nello stesso momento (ovviamente si potrebbe anche avere il caso in cui, per esempio, prima vengono svuotati due serbatoi, ed abbandonati, poi altri due, etc., ma tutto questo può essere facilmente ricondotto al caso in questione). Supponiamo ancora che la velocità efficace d'uscita del motore possa essere assunta costante (ipotesi

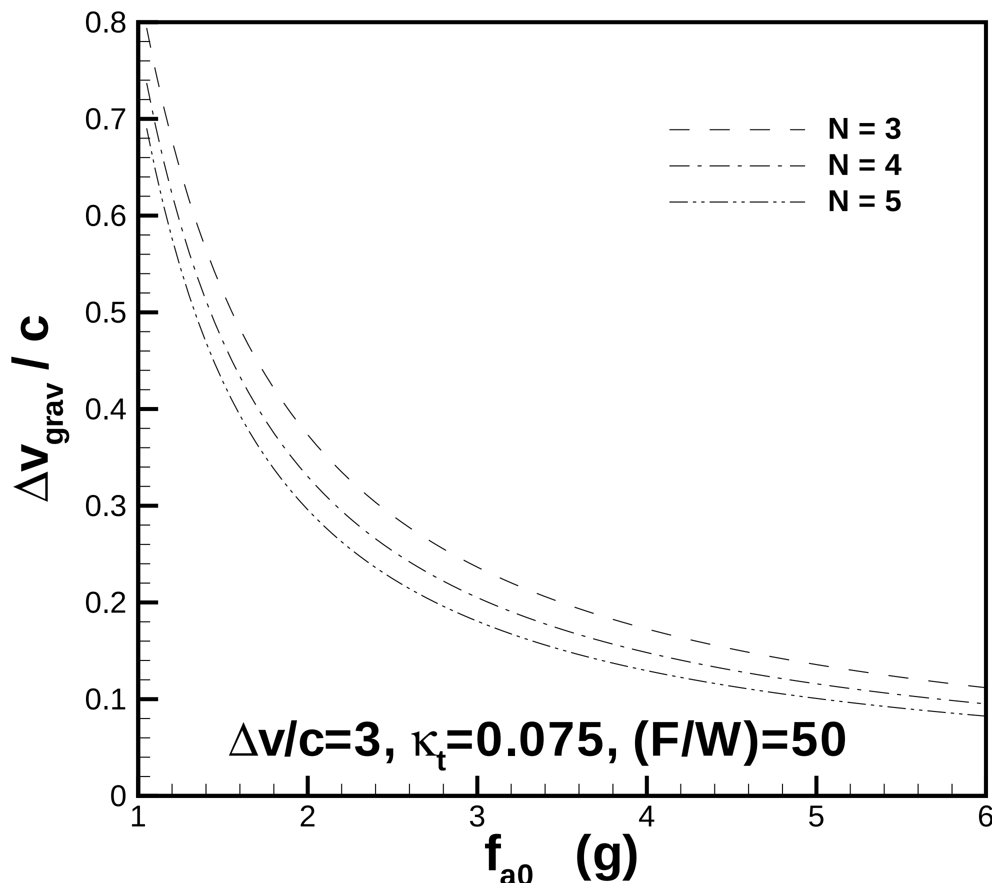
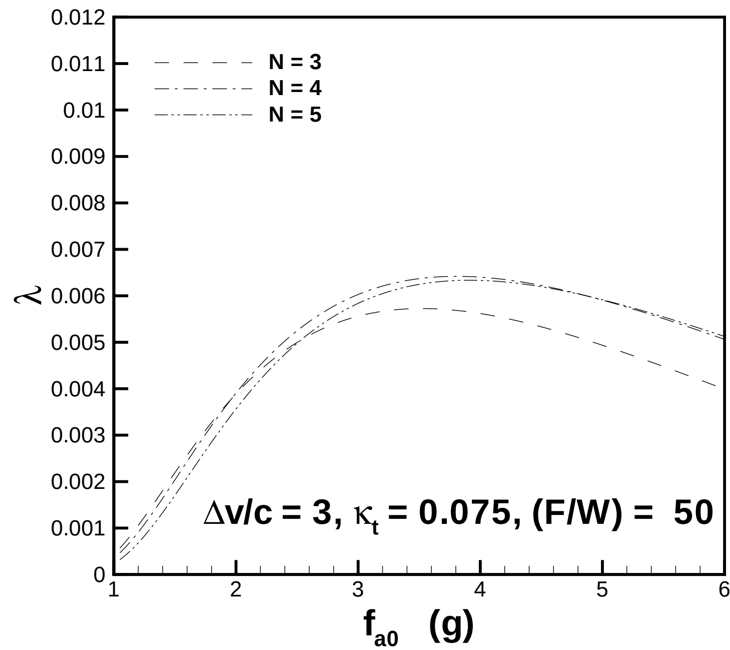


Figure 1.18: Perdite gravitazionali per volo verticale in assenza di atmosfera, in funzione del fattore di accelerazione iniziale, per $\Delta v/c = 3$.

meno giustificata rispetto al caso di stadiazione in tandem, dovendo in questo caso il motore coprire l'intero campo di pressioni che vanno dal valore al livello del suolo, a quello, sostanzialmente nullo, al momento dell'inserzione in orbita). Sia $m_{p,cs}$ la massa dei propellenti del *core stage*, la quale viene consumata solo dopo il distacco dei serbatoi esterni, e $m_{s,cs}$ la sua massa strutturale. Analogamente, chiamiamo $m_{p,et}$ la massa di propellenti contenuta in ciascun serbatoio esterno, e $m_{s,et}$ la sua massa strutturale. Possiamo allora riportarci al caso di stadiazione in tandem definendo ancora come primo sottorazzo il lanciatore completo, e come secondo sottorazzo il primo sottorazzo meno i k serbatoi esterni. Per le velocità efficaci di uscita di questi due 'stadi' si ha ovviamente, sotto le ipotesi adottate (c del motore costante),



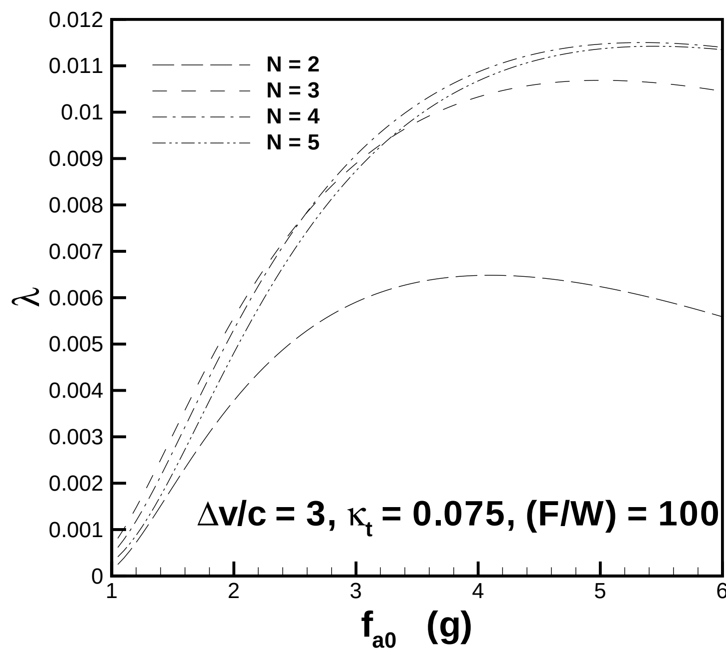


Figure 1.19: Rapporti di carico utile per volo verticale in assenza di atmosfera, fissato $\Delta v/c = 3$, in funzione del fattore di accelerazione iniziale, per $(F/W) = 50$ (sopra) e $(F/W) = 100$ (sotto).

$$c_1 \; = \; c_2 \; = \; c \qquad (1.67)$$

La definizione del coefficiente strutturale di ciascuno stadio richiede invece una certa attenzione. Per il primo stadio (che quindi consterà dei soli serbatoi staccabili) la massa delle strutture sarà k volte la massa delle strutture di ciascun serbatoio, e la massa di propellente k volte la massa di propellente di ciascun serbatoio, per cui la definizione (1.20) dà

$$\kappa_{s,1} \; = \; \frac{k \, m_{s,et}}{k \, (m_{s,et} \; + \; m_{p,et})} \qquad (1.68)$$

Per il secondo stadio dobbiamo far riferimento alle masse strutturali e di propellente del *core stage*, per cui si ha

$$\kappa_{s,2} \; = \; \frac{m_{s,cs}}{m_{s,cs} \; + \; m_{p,cs}} \qquad (1.69)$$

Adottando questi valori di velocità efficace d'uscita e dei coefficienti strutturali nelle formule ricavate per stadiazione in tandem (1.35–1.38), si possono quindi valutare le prestazioni del lanciatore.

Stadiazione 'mista'

In molti casi, come osservato a proposito della fig. 1.13, le prestazioni dei lanciatore sono potenziate aggiungendo al *core stage* un certo numero, diciamo k, di *boosters* ausiliari (detti *strap–on boosters*, per i quali useremo l'indice *sob*), i quali affiancano con la loro spinta i motori del *core stage*, anche se in genere hanno un tempo di combustione diverso (più breve di quello dei motori del *core stage*). Se per esempio ipotizziamo un lanciatore composto unicamente dal *core stage* e da k *strap–on boosters* (l'estensione per tenere conto di eventuali stadi superiori è immediata), possiamo definire il primo sottorazzo come il lanciatore completo, ed il secondo sottorazzo come il primo sottorazzo meno i k *boosters*, con i serbatoi del *core stage* però parzialmente svuotati per effetto del propellente consumato dai motori di questo stadio durante il tempo di combustone degli *strap–on boosters*. Per quanto riguarda la velocità efficace d'uscita del 'primo stadio', possiamo definirla (essendo essa il rapporto tra la spinta complessiva e la portata in massa di propellenti complessiva) come

$$c_1 \; = \; \frac{F_{cs} \; + \; k \, F_{sob}}{\dot{m}_{cs} \; + \; k \, \dot{m}_{sob}} \qquad (1.70)$$

essendo F_{cs} e F_{sob} le spinte sviluppate dai motori del *core stage* e da un singolo *strap–on booster* (supposte entrambe costanti), e $\dot{m}_{cs}$ e $\dot{m}_{sob}$ le relative portate in massa di propellente consumato. Per identificare invece le masse di propellenti che entrano nella definizione del coefficiente strutturale, dobbiamo scindere la massa di propellenti $m_{p,cs}$ contenuta nel *core stage* in una parte, $m'_{p,cs}$, consumata mentre gli *strap–on boosters* sono attivi, e la parte rimanente, $m''_{p,cs}$, consumata dopo il distacco degli *strap–on boosters*

$$m_{p,cs} \;=\; m'_{p,cs} \,+\, m''_{p,cs} \tag{1.71}$$

Chiamate $m_{s,sob}$ e $m_{p,sob}$ la massa strutturale e la massa di propellente di un singolo *booster*, è possibile quindi definire il coefficiente strutturale del 'primo stadio' come

$$\kappa_{s,1} \;=\; \frac{k\, m_{s,sob}}{m'_{p,cs} \,+\, k\,(m_{s,sob} \,+\, m_{p,sob})} \tag{1.72}$$

Per il 'secondo stadio', la velocità efficace di uscita è facilmente definita come rapporto tra spinta e portata in massa dei motori del *core stage*

$$c_2 \;=\; \frac{F_{cs}}{\dot{m}_{cs}} \tag{1.73}$$

mentre per la definizione del relativo coefficiente strutturale occorre avere l'accortezza di riferirsi alla sola massa di propellente consumata dopo il distacco dei *boosters*, nonché ovviamente alla massa strutturale $m_{s,cs}$ del *core stage*:

$$\kappa_{s,2} \;=\; \frac{m_{s,cs}}{m_{s,cs} \,+\, m''_{p,cs}} \tag{1.74}$$

Introducendo ancora questi valori di velocità efficace d'uscita e coefficienti strutturali nelle espressioni relative a stadiazione in tandem, si possono determinare le prestazione del lanciatore.

Stadiazione parziale

Nella stadiazione parziale vengono distaccati solo i motori, e non i serbatoi. Questo concetto era applicato per esempio nelle prime versioni del vettore Atlas, dotate di due motori ausiliari che affiancavano il propulsore principale nella prima fase del volo. Consideriamo ad esempio un lanciatore

composto da un *core stage* affiancato, nella fase iniziale, da k motori ausiliari (per i quali adottiamo l'indice *aux*) il cui tempo di combustione è ovviamente inferiore a quello dei motori del *core stage* (l'estensione per tenere conto di eventuali stadi superiori è immediata). Possiamo definire il primo sottorazzo come il lanciatore completo, ed il secondo sottorazzo come il primo sottorazzo meno i k motori ausiliari, con i serbatoi del *core stage* però parzialmente svuotati per effetto del propellente consumati dai motori durante il tempo di combustione dei motori ausiliari. Scindiamo pertanto ancora la massa di propellenti $m_{p,cs}$ contenuta nel *core stage* in una parte, $m'_{p,cs}$, consumata mentre i motori ausiliari sono attivi, e la parte rimanente, $m''_{p,cs}$, consumata dopo il distacco dei motori ausiliari

$$m_{p,cs} \;=\; m'_{p,cs} \,+\, m''_{p,cs} \tag{1.75}$$

La velocità efficace d'uscita del 'primo stadio' può essere definita (essendo il rapporto tra la spinta complessiva e la portata in massa di propellenti complessiva) come

$$c_1 \;=\; \frac{F_{cs} \,+\, k\, F_{aux}}{\dot{m}_{cs} \,+\, k\, \dot{m}_{aux}} \tag{1.76}$$

dove ovviamente F_{aux} e $\dot{m}_{aux}$ sono la spinta e la portata in massa consumata, per ciascuno dei motori ausiliari. Il coefficiente strutturale del 'primo stadio' sarà pertanto

$$\kappa_{s,1} \;=\; \frac{k\, m_{s,aux}}{m'_{p,cs} \,+\, k\, m_{s,aux}} \tag{1.77}$$

Per il 'secondo stadio' la velocità efficace d'uscita risulta pertanto

$$c_2 \;=\; \frac{F_{cs}}{\dot{m}_{cs}} \tag{1.78}$$

ed il coefficiente strutturale (la massa di propellenti consumata dal 'secondo stadio' è $m''_{p,cs}$)

$$\kappa_{s,2} \;=\; \frac{m_{s,cs}}{m_{s,cs} \,+\, m''_{p,cs}} \tag{1.79}$$

Distacco dello scudo termico

Durante l'ascesa del lanciatore, il carico utile è protetto dai carichi aerodinamici e termici da uno *scudo termico*, o *heat shield*, che viene poi rilasciato quando questi carichi divengono accettabili per il carico utile in virtù della progressiva rarefazione degli strati esterni dell'atmosfera, orientativamente intorno ai 100 km di quota. Compatibilmente con queste esigenze di protezione, lo *heat shield* va rilasciato il più presto possibile, per evitare di dover accelerare una massa che non fa parte del carico utile. Per descrivere il distacco dello scudo termico, risulta necessario introdurre un ulteriore stadio fittizio, ma la procedura è diversa a seconda che lo scudo termico sia distaccato in una fase di volo a motore spento (*coast*), oppure di volo in fase propulsa.

Distacco in fase di *coast*. Se lo scudo termico viene rilasciato durante la fase di *coast* che segue lo spegnimento dello stadio $i-1$, possiamo descrivere il distacco dello scudo termico introducendo uno sottorazzo fittizio i caratterizzato da un rapporto di massa

$$\lambda_i \;=\; \frac{m_{ui}}{m_{0i}} \tag{1.80}$$

dove $m_{0i} = m_{u,i-1}$, ed il suo carico utile è dato da

$$m_{ui} \;=\; m_{0i} \;-\; m_{hs} \tag{1.81}$$

essendo m_{hs} la massa dello scudo termico. Il Δv_i di questo sottorazzo è invece ovviamente nullo. Per il rapporto di carico utile complessivo del lanciatore, composto da N stadi (ma per quanto detto, da $N+1$ sottorazzi) si ha allora

$$\lambda \;=\; \lambda_1 \cdots \lambda_i \cdots \lambda_{N+1} \tag{1.82}$$

Distacco in fase propulsa. Se lo scudo termico viene invece rilasciato durante la fase propulsa dello stadio i, occorrerà associare a quest'ultimo due distinti sottorazzi (quindi ancora il numero di sottorazzi è $N+1$), il primo dei quali, di indice i, costituito ancora dal carico utile del sottorazzo $i-1$, mentre il secondo, di indice $i+1$, costituito dal sottorazzo i meno la massa dello scudo termico, meno ancora la massa $m'_{p,i}$ dei propellenti dello stadio i consumati fino al distacco dello scudo termico; chiamiamo invece $m''_{p,i}$ la massa di propellente restante, che viene consumata dopo il distacco dello scudo termico. Il coefficiente strutturale relativo quindi alla prima parte dello stadio i è

$$\kappa_{s,i} \;=\; \frac{m_{hs}}{m_{hs} \,+\, m'_{p,i}} \tag{1.83}$$

mentre quello relativo alla seconda parte risulta

$$\kappa_{s,i+1} \;=\; \frac{m_{s,i}}{m_{s,i} \,+\, m''_{p,i}} \tag{1.84}$$

essendo ovviamente $m_{s,i}$ la massa strutturale dell'intero stadio i. Si possono pertanto ancora ricavare i Δv_i dei singoli sottorazzi, ed i relativi rapporti di carico utile, ottenendo poi quello complessivo come

$$\lambda \;=\; \lambda_1 \,\cdots\, \lambda_i \, \lambda_{i+1} \,\cdots\, \lambda_{N+1} \tag{1.85}$$

Andamenti (qualitativi) di λ per alcune missioni tipiche

Consideriamo a titolo di esempio un lanciatore inteso ad inviare un carico utile in orbita terrestre bassa (quindi, come vedremo, $\Delta v \simeq 9500$ m/s), costituito da N stadi tutti utilizzanti gli stessi propellenti, che assumiamo possano essere solidi, liquidi *storable* o liquidi criogenici, con le seguenti caratteristiche, desunte dalle figg. 1.7, 1.8:

- propellenti solidi: primo stadio $c_1 = 2400$ m/s e $\kappa_s = 0,09$, stadi superiori $c_i = 2800$ m/s e $\kappa_s = 0,10$;
- propellenti liquidi *storable*: primo stadio $c_1 = 2500$ m/s e $\kappa_s = 0,06$, stadi superiori $c_i = 2900$ m/s e $\kappa_s = 0,07$;
- propellenti liquidi criogenici: primo stadio $c_1 = 3400$ m/s e $\kappa_s = 0,12$, stadi superiori $c_i = 4400$ m/s e $\kappa_s = 0,13$.

Sono stati considerati margini di propellente aggiuntivo rispetto alla massa determinata dalla relazione di Tsiolkowsky, in quanto una piccola parte (ma significativa se confrontata con il carico utile) del propellente può rimanere intrappolata nel sistema di alimentazione (per esempio a fine combustione di un motore a propellenti liquidi le linee di alimentazione sono ancora piene di propellente; nei propulsori di satelliti, che adottano sistemi di espulsione, cosidetti 'positivi', del propellente

per poter operare in assenza di gravità, quali membrane, cilindri che si accartocciano, etc., una certa frazione del propellente, fino al 3 o 4%, può rimanere intrappolata nel sistema di espulsione); oppure, in sistemi liquidi bipropellente, il rapporto in massa tra le portate di ossidante e combustibile O/F può risultare lievemente diverso da quello nominale, per cui uno dei due propellenti si esaurisce prima dell'altro, e risulta perciò inutilizzabile (è opportuno considerare un margine intorno all'1%); ancora, per sopperire all'incertezza nella quantità di propellente effettivamente caricata nei serbatoi (per possibili imprecisioni delle bilance che la misurano), è opportuno prevedere un ulteriore margine dello 0,5%. A titolo puramente indicativo, è stato ipotizzato un margine dell'1% per gli stadi inferiori, e del 3% per l'ultimo stadio, questo più elevato per correggere eventuali inaccuratezze di iniezione in orbita. Essendo tutto sommato le velocità efficaci di uscita dei vari stadi (di una stessa soluzione propulsiva ipotizzata) abbastanza vicine fra loro, e così pure i loro coefficienti strutturali, si è fatto poi ancora ricorso alla condizione di equiripartizione (1.42) del Δv complessivo tra gli N stadi, commettendo un errore presumibilmente accettabile.

Per il rapporto di carico utile complessivo λ si hanno allora i risultati riportati sotto forma di istogrammi in fig. 1.20, nonché espressi in percentuale nella tab. 1.1. Incidentalmente, questi risultano essere alquanto ottimistici perché in realtà includono anche masse non 'utili' come gli scudi di protezione termica e le strutture di supporto del satellite. Anche l'ipotesi che il coefficiente strutturale sia uguale per tutti gli stadi superiori è discutibile, essendo invece tipicamente più alto per stadi piccoli, vedi anche successive figg. 1.24–1.27. Tuttavia, i risultati mostrati sono interessanti almeno dal punto di vista qualitativo.

caso	propellenti	$\lambda_{N=1}$ %	$\lambda_{N=2}$ %	$\lambda_{N=3}$ %	$\lambda_{N=4}$ %	$\lambda_{N=5}$ %
$\Delta v = 9500$ m/s, κ_{si} nominali	solidi	0,00	0,28	1,00	1,34	1,53
	liquidi *storable*	0,00	0,93	1,68	2,00	2,19
	liquidi criogenici	0,00	2,97	4,83	5,70	6,20
$\Delta v = 9500$ m/s, κ_{si} aumentati 1%	solidi	0,00	0,18	0,89	1,23	1,42
	liquidi *storable*	0,00	0,75	1,52	1,86	2,05
	liquidi criogenici	0,00	2,64	4,54	5,42	5,94
$\Delta v = 13500$ m/s, κ_{si} nominali	solidi	0,00	0,00	0,05	0,15	0,21
	liquidi *storable*	0,00	0,00	0,19	0,31	0,38
	liquidi criogenici	0,00	0,07	0,98	1,45	1,73
$\Delta v = 13500$ m/s, κ_{si} aumentati 1%	solidi	0,00	0,00	0,03	0,12	0,18
	liquidi *storable*	0,00	0,00	0,15	0,27	0,34
	liquidi criogenici	0,00	0,00	0,86	1,33	1,61

Tab. 1.1. Rapporti di carico utile (espressi in percentuale) per missioni LEO e GEO, sotto diverse ipotesi per la soluzione propulsiva ed i coefficienti strutturali.

Si noti come tutte le combinazioni di propellenti considerate risultino insufficienti a svolgere la missione assegnata con un solo stadio. All'aumentare del numero degli stadi, il carico utile cresce dapprima notevolmente, poi l'incremento diventa marginale. Considerando l'incremento di costo del lanciatore dovuto alla sua suddivisione in un gran numero di stadi (perché appunto molte parti devono essere moltiplicate), si preferisce in genere contenere il numero degli stadi da 2 a 4, con i valori più alti adottati per i propellenti a basse prestazioni (cioè solidi). I valori del rapporto di carico utile sono estremamente sensibili al coefficiente strutturale, specie per i propellenti a bassa c; se per esempio i valori specificati sopra di κ_s sono aumentati dell'1% (un modesto incremento), i rapporti di carico utile si riducono come indicato dalla fig. 1.21. Questa sottolinea l'assoluta necessità di contenere al minimo la massa delle strutture.

Se invece consideriamo una missione in GEO, di impatto o *fly–by* lunare, oppure di fuga, per le quali $\Delta v \simeq 13500$ m/s, i carichi utili risultanti (adottando i valori originari di κ_s) sono indicati in fig. 1.22; i valori del rapporto di carico utile per $\Delta v = 9500$ m/s sono anche riportati a titolo di riferimento. Dal confronto con le figure precedenti si nota come il carico utile diminuisce fortemente, specie per i propulsori a bassa c, e come convenga spostarsi verso architetture ad un numero maggiore di stadi. Si nota inoltre come il vantaggio derivante dall'impiego di propellenti ad alte prestazioni diventa assolutamente determinante per missioni ad alto Δv. La fig. 1.23 riporta poi, in modo simile alla fig. 1.21, l'effetto di un aumento dell'1% dei coefficienti strutturali. Si può notare che alti Δv sottolineano ulteriormente l'importanza di ridurre al minimo le masse strutturali.

Abbiamo accennato al fatto che i coefficienti strutturali sono tipicamente più alti per stadi di piccola taglia, per la difficoltà a ridurre in scala tutti i componenti, in particolare gli attuatori. Questa circostanza è confermata dalla fig. 1.24, che mostra i valori del rapporto spinta/peso di alcuni motori a propellente liquido di spinta elevata (notare la scala logaritmica delle ascisse). La figura riporta anche l'espressione per un *fit* del rapporto spinta/peso del motore in funzione della spinta; si osservi però che tale relazione non rappresenta in alcun modo l'espressione di una limitazione fisica, ma rappresenta semplicemente lo stato dell'arte di quanto è stato possibile realizzare sinora. In modo simile, la fig. 1.25 riporta dati analoghi per motori di spinta più limitata, operanti nel vuoto (in questo caso la scala delle ascisse è lineare); la fig. 1.26 riporta poi dati analoghi per propulsori monopropellenti, tipicamente impiegati nei sistemi propulsivi dei satelliti, o per controllo d'assetto. Questo andamento del rapporto spinta/peso porta evidentemente a coefficienti strutturali generalmente più bassi per motori di grande taglia, come mostrato in fig. 1.27 per varie soluzioni propulsive. Fanno apparentemente eccezione gli endoreattori a propellente solido, ma occorre osservare che in questo caso i propulsori di taglia più grande sono impiegati come *strap–on boosters* di lanciatori, per cui nella massa strutturale è inclusa anche la massa delle strutture che trasmettono la loro (elevata) spinta al *core stage*.

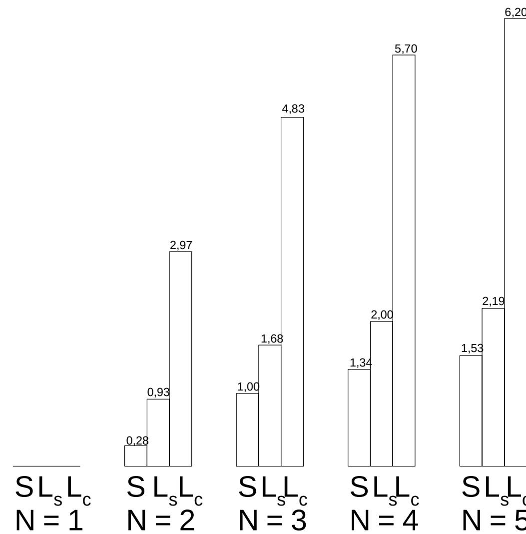


Figure 1.20: Rapporti di carico utile per Δv = 9500 m/s, per lanciatori a propellente solido (S), liquido storable (L_s), liquido criogenico (L_c), in funzione del numero di stadi N.

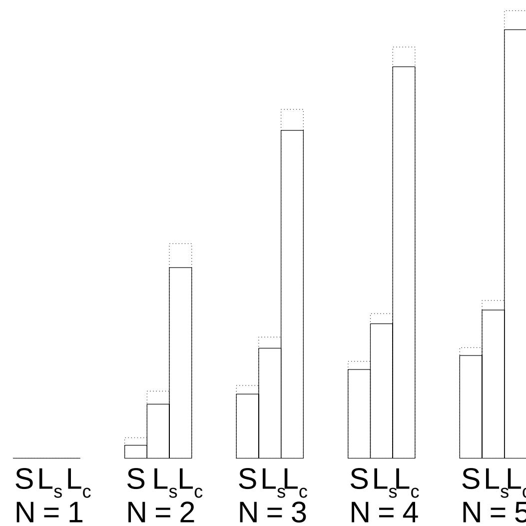


Figure 1.21: Rapporti di carico utile per Δv = 9500 m/s, per lanciatori a propellente solido (S), liquido storable (L_s), liquido criogenico (L_c), in funzione del numero di stadi N. — — — coefficienti strutturali incrementati dell'1% rispetto alla figura sopra.

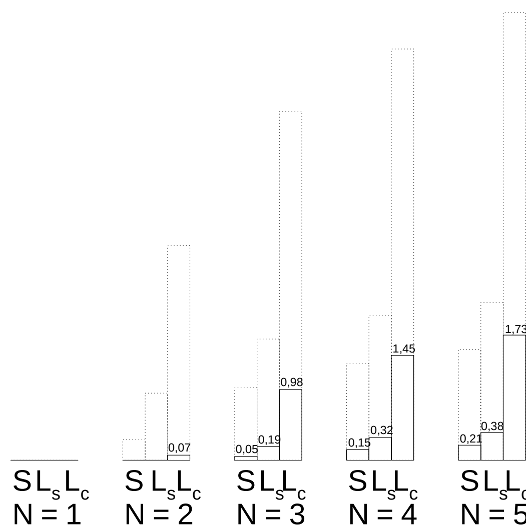


Figure 1.22: Rapporti di carico utile per $\Delta v = 13500$ m/s, per lanciatori a propellente solido (S), liquido storable (L_s), liquido criogenico (L_c), in funzione del numero di stadi N.

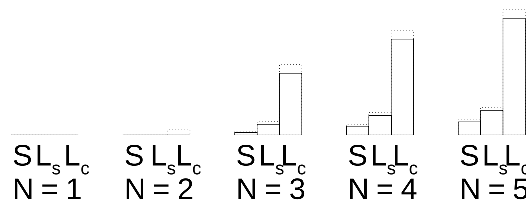


Figure 1.23: Rapporti di carico utile per $\Delta v = 13500$ m/s, per lanciatori a propellente solido (S), liquido storable (L_s), liquido criogenico (L_c), in funzione del numero di stadi N. — — — coefficienti strutturali incrementati dell'1% rispetto alla figura sopra.

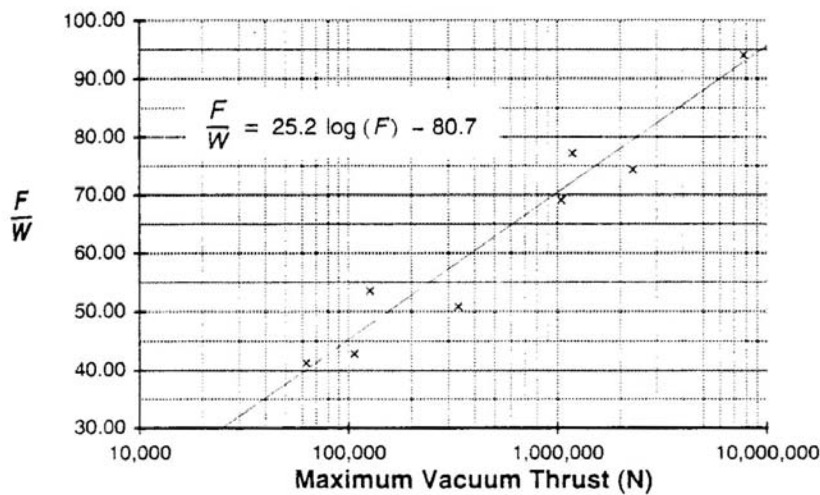


Figure 1.24: Rapporti spinta/peso di motori di *boosters* di lanciatori a propellente liquido (bipropellenti), da [7].

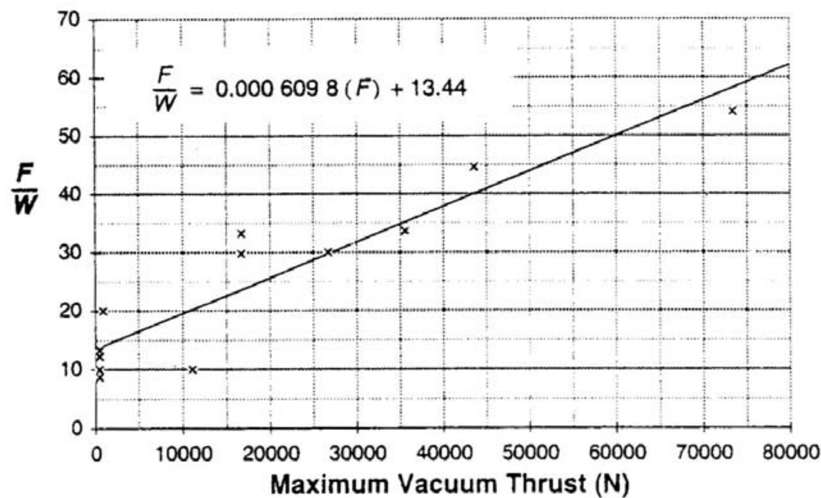


Figure 1.25: Rapporti spinta/peso di motori operanti nel vuoto (a propellente liquido, bipropellenti), da [7].

Va infine notato che un confronto tra le diverse opzioni prospettate (propellenti solidi, liquidi *storable* e liquidi criogenici) deve anche considerare altri fattori. Innanzitutto, il Δv efficace per una stessa missione sarà lievemente diverso per le tre opzioni citate, perché la differente densità dei propellenti porta a serbatoi più o meno voluminosi, con conseguenti differenti perdite aerodinamiche. Talvolta,

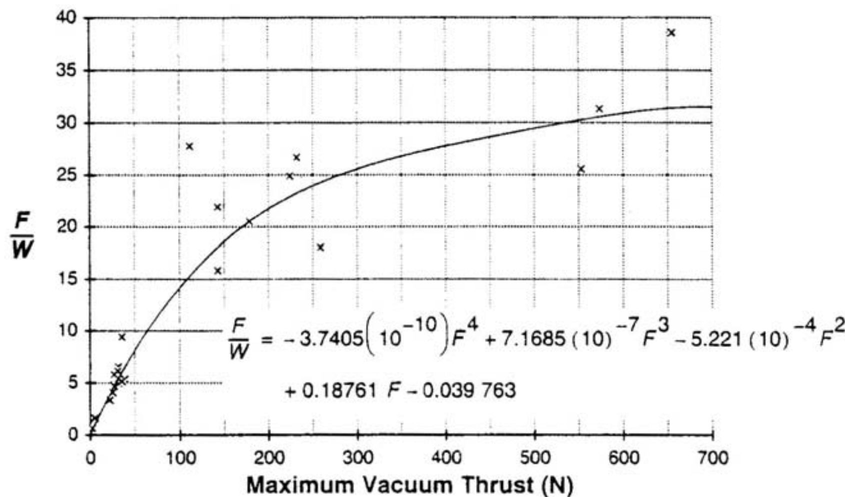


Figure 1.26: Rapporti spinta/peso di motori a monopropellente liquido, da [7].

per cercare di quantificare gli effetti legati alla densità dei propellenti (propellenti ad alta densità riducono la resistenza aerodinamica e consentono serbatoi più piccoli, quindi più leggeri), si usa come indice di merito un impulso specifico basato sulla densità (*density specific impulse*) definito come

$$\rho \, I_{sp} \tag{1.86}$$

dove la densità di una combinazione ossidante/combustibile in rapporto di massa O/F è esprimibile come

$$\rho = \frac{1 + \dfrac{O}{F}}{\dfrac{1}{\rho_F} + \dfrac{O/F}{\rho_O}} \tag{1.87}$$

perché per ogni kg di combustibile, che occupa un volume $1/\rho_F$, sono presenti O/F kg di ossidante, di volume quindi $(O/F)/\rho_O$ (ovviamente ρ_F e ρ_O indicano le densità di combustibile ed ossidante).

Inoltre, bisogna considerare che l'obiettivo ultimo non è tanto quello di ottenere il massimo rapporto di carico utile, ma quello di conseguire il minimo costo per kg di carico utile in orbita. Occorre quindi considerare che opzioni che consentano prestazioni più elevate (caso esemplificativo, la soluzione

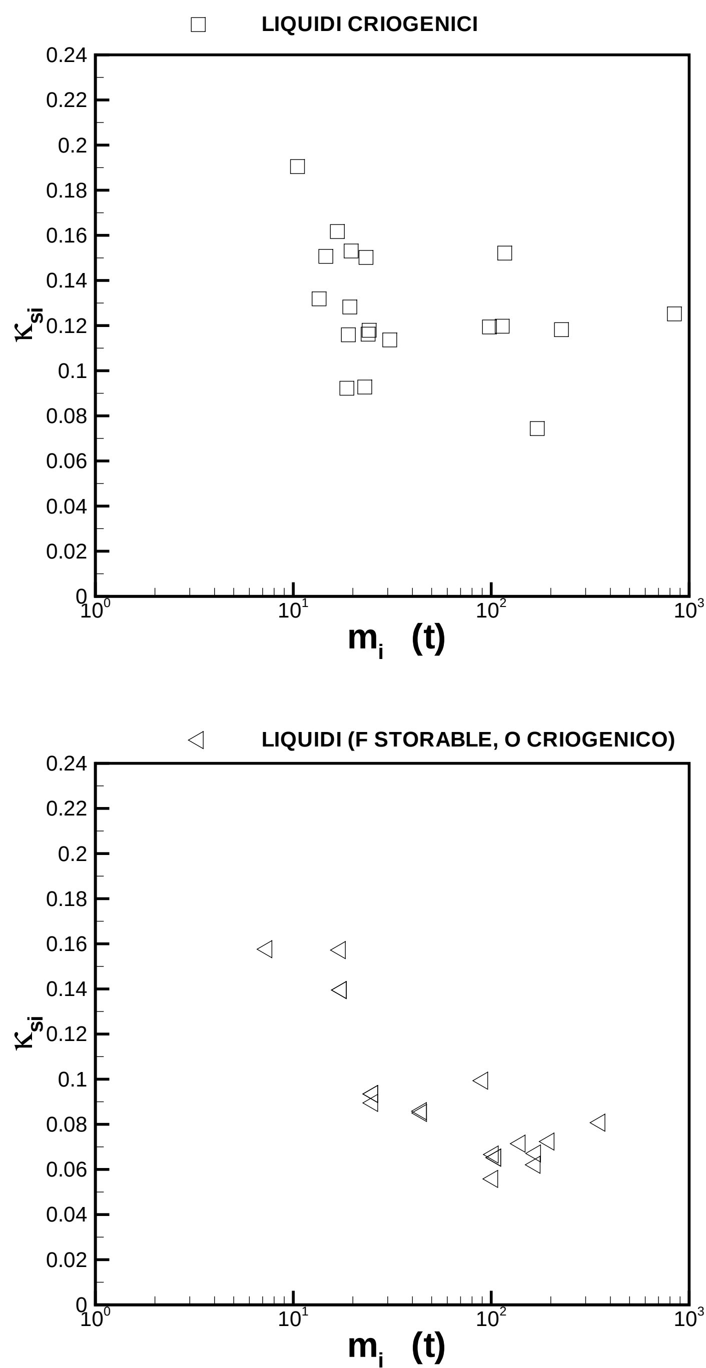


Figure 1.27: Coefficienti strutturali per vari stadi propulsivi, in funzione della massa iniziale dello stadio, per varie soluzioni propulsive (continua alla pagina seguente).

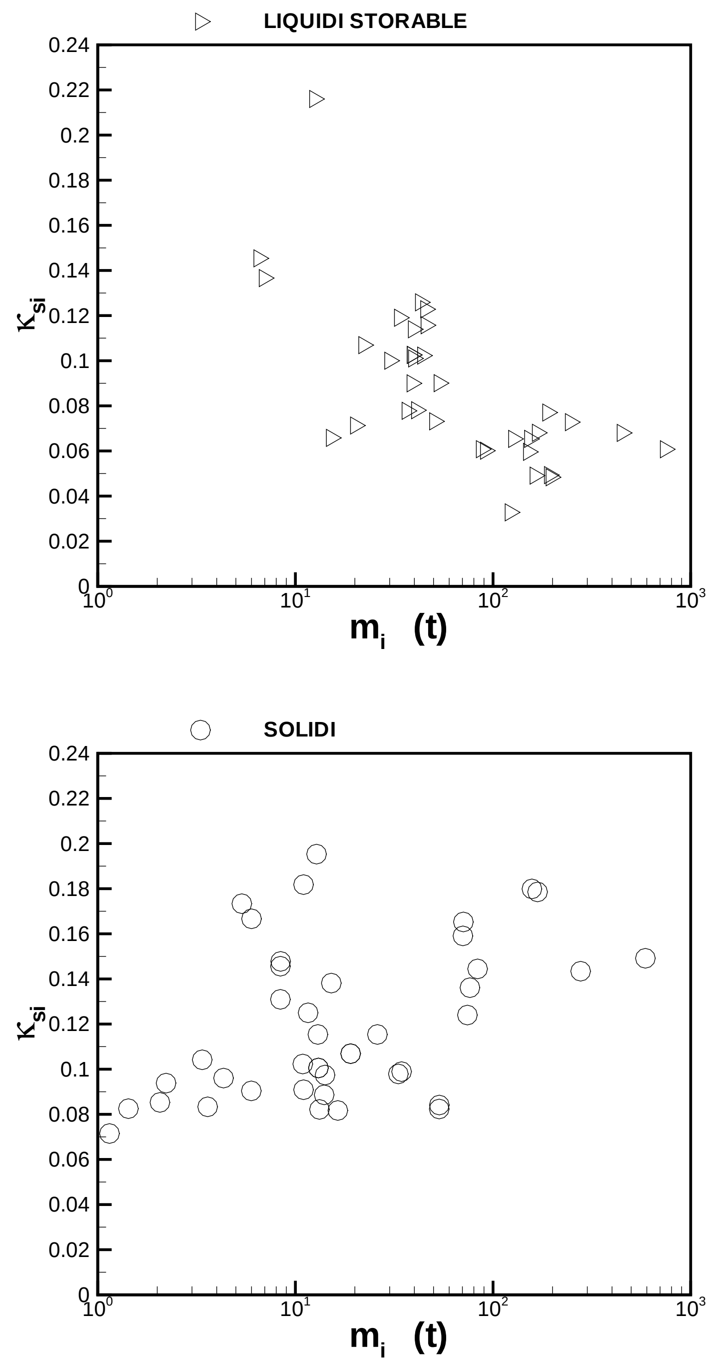


Figure 1.26: Coefficienti strutturali per vari stadi propulsivi, in funzione della massa iniziale dello stadio, per varie soluzioni propulsive (fine).

LOX/LH) risultano generalmente anche più costose (per la necessità di dover generare e gestire propellenti criogenici, di utilizzare materiali particolari, più costosi, per prevenire l'infragilimento da idrogeno, etc.; i sistemi a propellenti liquidi sono poi in ogni caso più costosi di quelli a propellenti solidi, per la presenza di un sistema di alimentazione). Si potrebbe tentare di descrivere i costi introducendo una relazione di proporzionalià tra il costo di un lanciatore (o di uno stadio) e la sua massa iniziale, dove il coefficiente di proporzionalità sarà ovviamente diverso per differenti opzioni propulsive. Questa analisi andrebbe però ulteriormente affinata in quanto in realtà il costo di un lanciatore (o di uno stadio) non è semplicemente proporzionale alla sua massa iniziale m_0, ma è più correttamente rispecchiato da una relazione del tipo costo $\propto m_0^n$, dove l'esponente n è lievemente inferiore ad uno, per esempio 0,7. La fig. 1.27 riporta a titolo di esempio il costo per kg di carico utile in LEO, normalizzato rispetto al valore per lanciatore bistadio, che si avrebbe per la soluzione a propellenti liquidi *storable* sopra delineata, assumendo appunto che il costo del singolo stadio sia proporzionale alla sua massa $m_{0i} - m_{ui}$ (differenza tra massa iniziale del *sottorazzo* i e massa del carico utile del sottorazzo stesso) elevata l'esponente 0,7. Si può osservare che mentre la tab. 1.1 (secondo rigo) indica che il carico utile aumenta (su base relativa) dell'81% passando dalla soluzione bistadio a quella tristadio, poi del 19% passando dalla tristadio alla quadristadio, ed ancora del 9% passando dalla quadristadio alla pentastadio, il costo per kg in orbita si riduce corrispondentemente solo del 38%, del 9%, e del 2% circa. Questo indica che con ogni probabilità è sicuramente vantaggioso considerare la soluzione tristadio anziché quella bistadio, mentre l'eventuale passaggio ad una soluzione quadristadio comporta un'attenta valutazione di vantaggi e svantaggi (questi relativi ai maggiori costi e tempi di sviluppo, alla diminuzione dell'affidabilità del lanciatore, alla più vasta esigenza di personale qualificato sia per il progetto che per la costruzione dei vari stadi). La soluzione a cinque stadi risulterà poi quasi certamente non giustificata.

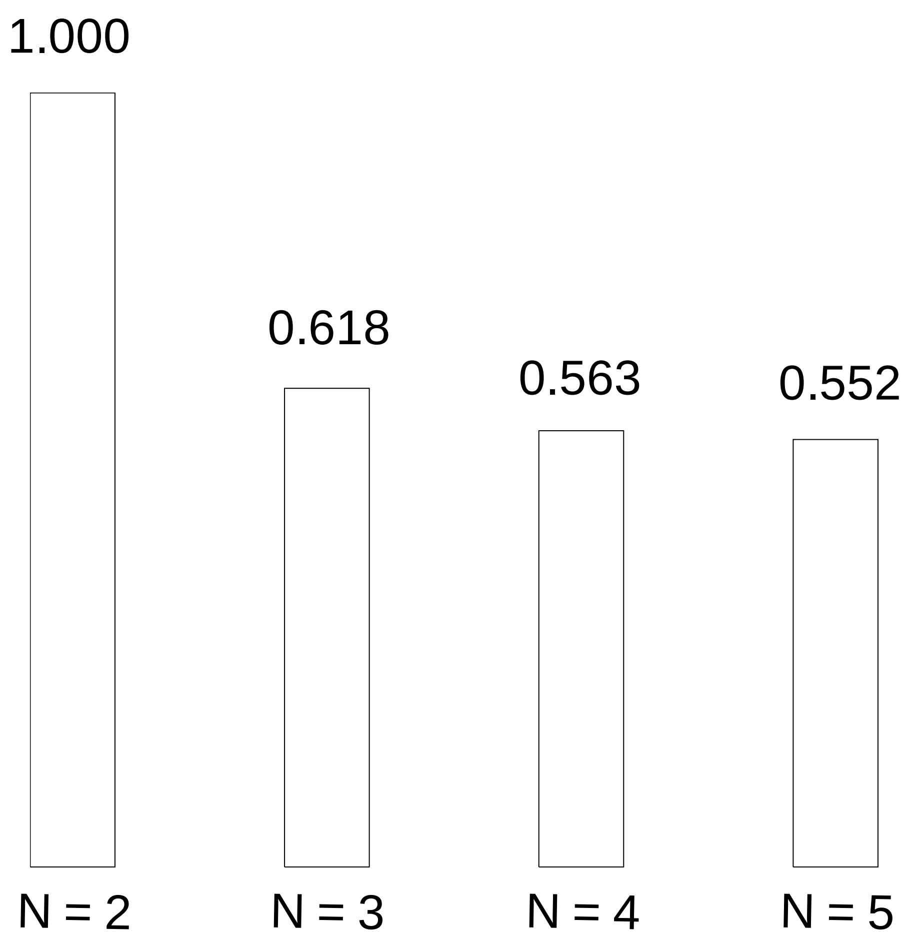


Figure 1.27: Costo per kg di carico utile (per Δv = 9500 m/s, riferito alla soluzione bistadio), per lanciatori a propellente liquido *storable*, assumendo il costo dello stadio proporzionale alla potenza 0,7 della sua massa.

Capitolo 2
Traiettoria di ascesa del lanciatore

2.1 Equazioni del moto traslazionale del razzo

Nel descrivere il moto di un lanciatore durante la sua traiettoria di ascesa in orbita, dobbiamo innanzitutto distinguere tra il moto del centro di massa (o baricentro) del razzo, che è analizzato in questo paragrafo, ed il moto rotazionale attorno al centro di massa, che sarà trattato nei par. 2.3.1 e successivi.

Per analizzare il moto traslazionale, supponiamo dapprima che esso sia un moto piano (vedremo poi i limiti di questa ipotesi), e che il campo gravitazionale della Terra possa essere assimilato a quello prodotto da una massa uguale a quella della Terra, concentrata nel centro della Terra stessa (il che equivale ad assumere che la Terra sia sferica, e che su ogni corteccia sferica di spessore infinitesimo di tale sfera la densità sia uniforme). Fissiamo l'attenzione su un istante generico della fase di salita, e consideriamo due sistemi di assi ortogonali, entrambi con origine nel centro di massa del razzo, vedi fig. 2.1:

- un sistema (x, y) con asse x diretto secondo l'orizzontale locale, ed asse y ortogonale ad esso, quindi radiale, passante per il centro della Terra. Siano $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ i versori degli assi x ed y, il primo diretto secondo la direzione di rotazione della Terra, il secondo verso l'esterno;

- un sistema (m, n) con asse m diretto secondo la direzione della velocità *assoluta* istantanea del razzo, ed asse n ortogonale ad esso.

Nella fig. 2.1 sono anche indicati gli angoli γ tra la direzione dell'orizzontale locale (cioè l'asse x) e quella della velocità *assoluta* (cioè l'asse m), ossia l'*angolo di volo*, e l'angolo ϵ formato dalle direzioni della velocità assoluta e dell'asse del razzo. Il sussistere di un angolo tra la direzione della velocità assoluta e l'asse del razzo risulta necessario, almeno nella prima fase della traiettoria di ascesa, per

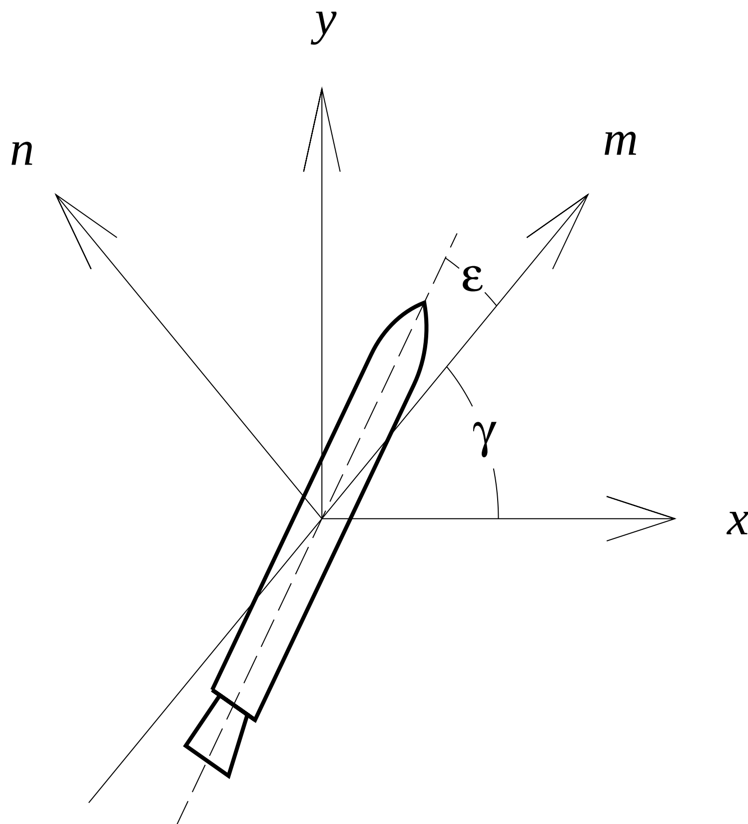


Figure 2.1: Sistemi di riferimento (x, y) e (m, n).

minimizzare perdite aerodinamiche e carichi laterali sul razzo. Infatti, possiamo supporre in prima approssimazione che l'atmosfera ruoti solidalmente con la Terra, per cui la velocità *assoluta* del razzo $\vec{v}$ (riferita cioè ad un sistema di riferimento x', y' con orientazione immutabile rispetto alle stelle fisse) può essere decomposta, vedi fig. 2.2, nella somma di una velocità relativa all'atmosfera $\vec{v}_r'$ ed una velocità di trascinamento dovuta al moto di rotazione della Terra $\vec{v}_t' = \vec{\omega}_T \times \vec{r}$, essendo ω_T la velocità angolare di rotazione della Terra (uguale a $2\,\pi\, R_T/T_{sid}$, dove R_T è il raggio della Terra, supposta sferica, e T_{sid} la durata del giorno siderale definita in par. 1.2.3), e $\vec{r}$ il raggio vettore che va dal centro della Terra alla posizione corrente del lanciatore (poiché l'altezza dell'atmosfera è trascurabile rispetto al raggio della Terra, è lecita l'approssimazione $r \simeq R_T$). Per far sì che il lanciatore offra la minima resistenza aerodinamica, e non sia gravato da carichi laterali che la sua

struttura allungata avrebbe difficoltà a sopportare (a meno di non irrobustirla, appesantendola in modo inaccettabile), risulta opportuno che l'asse del razzo sia orientato, almeno negli strati più densi dell'atmosfera, secondo la direzione della velocità relativa all'atmosfera $\vec{v}_r'$, la quale forma l'angolo indicato con χ in fig. 2.2 con la direzione della velocità assoluta. Una volta giunti ad alta quota, ove l'effetto della resistenza aerodinamica risulta trascurabile, si può riportare l'asse del razzo nella direzione della velocità assoluta. Quindi, ricapitolando, risulta opportuno adottare $\epsilon \simeq \chi$ negli strati bassi dell'atmosfera, e $\epsilon \simeq 0$ al di fuori di essa, con una zona di transizione $0 \leq \epsilon \leq \chi$ nella regione intermedia.

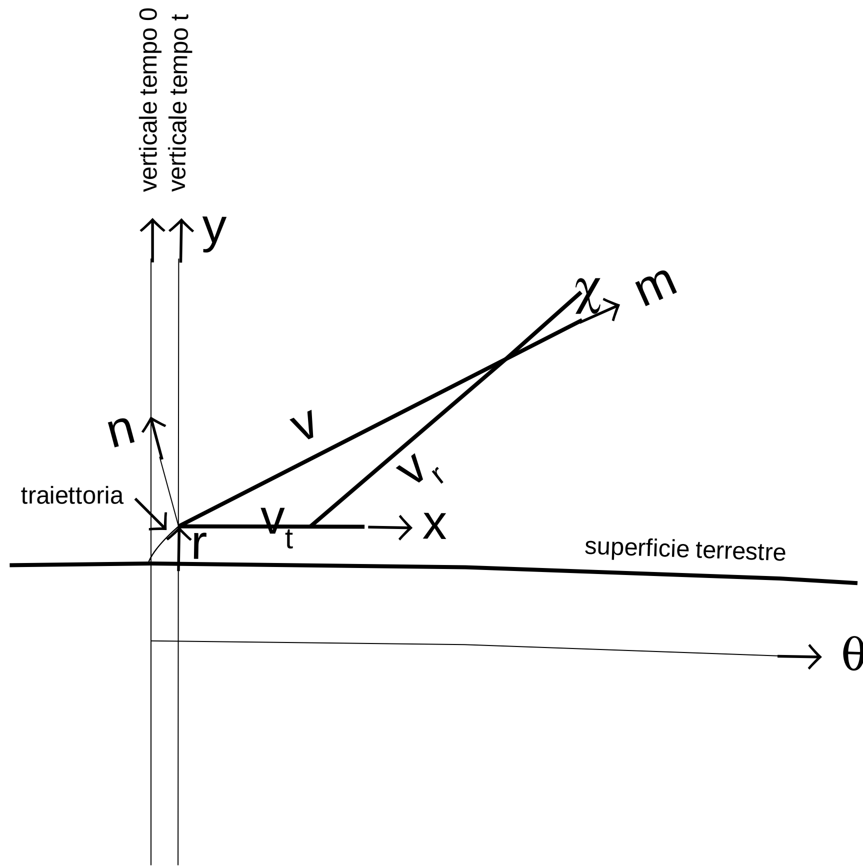


Figure 2.2: Velocità assoluta, relativa (all'atmosfera), e di trascinamento (dovuta al moto di rotazione della Terra).

La fig. 2.2 indica l'angolo χ formato dalle direzioni della velocità assoluta e relativa, il raggio vettore

r misurato dal centro della Terra, e l'angolo θ tra la posizione del raggio vettore al momento del lancio (assunto come direzione di riferimento, invariabile rispetto alle stelle fisse), e quella ad un istante generico t, i quali identificano un sistema di riferimento polare $(r,\, \theta)$. Il raggio vettore segue il moto del razzo istante per istante, definendo quindi una velocità angolare $\dot{\theta}$ (da non confondere con quella dovuta al moto di rotazione della Terra, indicata con ω_T). La velocità *assoluta* del razzo $\vec{v}$ (riferita come detto ad un sistema con orientazione invariabile rispetto alle stelle fisse) risulta essere esprimibile come la somma della sua velocità relativa $\vec{v}_r$ (nel sistema $r,\, \theta$) e della velocità di trascinamento $\vec{v}_t$ (dovuta al moto angolare del sistema $r,\, \theta$ stesso):

$$\vec{v} \;=\; \vec{v}_r \;+\; \vec{v}_t \tag{2.1}$$

Per scrivere la seconda legge di Newton

$$\vec{F} \;=\; m\,\vec{a} \tag{2.2}$$

essendo $\vec{a}$ l'accelerazione assoluta, secondo gli assi del sistema $(m,\, n)$, esprimeremo le componenti di accelerazione secondo questi due assi attraverso quelle secondo gli assi $(x,\, y)$, valendo la relazione

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_m & = & a_x \cos\gamma \;+\; a_y \sin\gamma \\ a_n & = & -\,a_x \sin\gamma \;+\; a_y \cos\gamma \end{array} \right. \tag{2.3}$$

L'accelerazione relativa $\vec{a}_r$ nel sistema $(r,\, \theta)$ è legata all'accelerazione assoluta $\vec{a}$ dalla relazione

$$\vec{a} \;=\; \vec{a}_r \;+\; \vec{a}_t \;+\; \vec{a}_c \tag{2.4}$$

dove $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_c$ sono rispettivamente l'accelerazione di trascinamento, dovuta al moto dell'origine del sistema $(x,\, y)$, e l'accelerazione complementare, o di Coriolis. Le tre accelerazioni che compaiono a secondo membro della eq. (2.4) sono esprimibili come

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{a}_r & = & \ddot{r}\,\vec{\jmath} \\ \vec{a}_t & = & r\,\ddot{\theta}\,\vec{\imath} \;-\; r\,\dot{\theta}^2\,\vec{\jmath} \\ \vec{a}_c & = & 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r \;=\; 2\,\dot{\theta}\,\dot{r}\,\vec{\imath}, \qquad\qquad (\text{dove } \omega \;=\; \dot{\theta}) \end{array} \right. \tag{2.5}$$

In particolare, l'accelerazione relativa è la componente in direzione $\vec{\jmath}$ dovuta all'accelerazione radiale

$\ddot{r}$ del centro di massa. L'accelerazione di trascinamento consta di una componente in direzione $\vec{\imath}$ dovuta all'accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ della traiettoria descritta dal centro di massa del razzo, e dell'accelerazione centripeta, diretta secondo la direzione negativa del versore $\vec{\jmath}$. L'accelerazione di Coriolis, data da due volte il prodotto vettoriale della velocità angolare (che in questo caso coincide con $\dot{\theta}$, velocità angolare del centro di massa del razzo) per la componente radiale della velocità relativa[2] , è invece ancora diretta secondo la direzione $\vec{\imath}$. Raggruppando quindi i termini in $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, si ottengono rispettivamente le componenti dell'accelerazione assoluta secondo gli assi x e y:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_x & = & r\,\ddot{\theta} \,+\, 2\,\dot{\theta}\,\dot{r} \\ a_y & = & \ddot{r} \,-\, r\,\dot{\theta}^2 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Osserviamo che la componente verticale della velocità assoluta risulta essere $v \sin\gamma$, mentre la componente orizzontale risulta essere $v \cos\gamma$, per cui si può scrivere

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{r} & = & v \sin\gamma \\ r\,\dot{\theta} & = & v \cos\gamma \end{array} \right. \tag{2.7}$$

La (2.7), ulteriormente derivata rispetto al tempo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{r} & = & \dot{v} \sin\gamma \,+\, v\,\dot{\gamma} \cos\gamma \\ \dot{r}\,\dot{\theta} \,+\, r\,\ddot{\theta} & = & \dot{v} \cos\gamma \,-\, v\,\dot{\gamma} \sin\gamma \end{array} \right. \tag{2.8}$$

risulta utile nei successivi sviluppi. Il termine nell'accelerazione di Coriolis nella (2.6) può essere scisso in due termini uguali, ed utilizzando entrambe le (2.7) e la seconda delle (2.8), si ottiene un'espressione nella velocità assoluta e nell'angolo di volo, e loro derivate; analogamente, trattando convenientemente il termine centripeto, e ricorrendo ad entrambe le (2.8), si ottiene infine

[2] L'accelerazione di Coriolis viene spesso indicata come due volte il prodotto vettoriale della velocità angolare per l'*intera* velocità relativa, ma in questo caso nel termine dovuto alla componente tangenziale della velocità relativa si tiene conto di un effetto dovuto in realtà alla forza centrifuga. La differenza è tuttavia inessenziale nella presente trattazione, nella quale la velocità relativa ha la sola componente radiale.

$$\begin{cases} a_x \; = \; \dfrac{\dot{r}}{r} r\,\dot{\theta} \; + \; \dot{r}\,\dot{\theta} \; + \; r\,\ddot{\theta} \; = \; \dfrac{v^2}{r} \sin\gamma\,\cos\gamma \; + \; \dot{v}\,\cos\gamma \; - \; v\,\dot{\gamma}\,\sin\gamma \\ a_y \; = \; \ddot{r} \; - \; \dfrac{1}{r}(r\,\dot{\theta})^2 \; = \; \dot{v}\,\sin\gamma \; + \; v\,\dot{\gamma}\,\cos\gamma \; - \; \dfrac{v^2}{r}\cos^2\gamma \end{cases} \tag{2.9}$$

Sostituendo nelle (2.3)

$$\begin{cases} a_m \; = \; \dfrac{v^2}{r} \sin\gamma\,\cos^2\gamma \; + \; \dot{v}\,\cos^2\gamma \; - \; v\,\dot{\gamma}\,\sin\gamma\,\cos\gamma \; + \; \dot{v}\,\sin^2\gamma \, + \\ \qquad v\,\dot{\gamma}\,\sin\gamma\,\cos\gamma \; - \; \dfrac{v^2}{r}\sin\gamma\,\cos^2\gamma \\ a_n \; = \; -\dfrac{v^2}{r}\sin^2\gamma\,\cos\gamma \; - \; \dot{v}\,\sin\gamma\,\cos\gamma \; + \; v\,\dot{\gamma}\,\sin^2\gamma \; + \; \dot{v}\,\sin\gamma\,\cos\gamma \, + \\ \qquad v\,\dot{\gamma}\,\cos^2\gamma \; - \; \dfrac{v^2}{r}\cos^3\gamma \end{cases} \tag{2.10}$$

e semplificando, si ottiene infine

$$\begin{cases} a_m \; = \; \dot{v} \\ a_n \; = \; v\,\dot{\gamma} \; - \; \dfrac{v^2}{r}\cos\gamma \end{cases} \tag{2.11}$$

Vediamo dunque che l'accelerazione nella direzione m della velocità assoluta coincide con la derivata temporale della velocità assoluta stessa, mentre l'accelerazione nella direzione normale n comprende due termini, uno legato alla derivata temporale dell'angolo di volo, l'altro alla componente in direzione n dell'accelerazione centripeta.

Dopo questi sviluppi cinematici, che ci permettono di esprimere convenientemente le accelerazioni che compaiono a secondo membro della (2.2) proiettata lungo le direzioni m e n, ricaviamo ora le equazioni del moto traslazionale del razzo, specializzando le forze che compaiono a primo membro.

2.1.1 Equazioni del moto traslazionale per incidenza aerodinamica ed angolo di *gimbal* nulli

Consideriamo dapprima il caso in cui l'incidenza aerodinamica sia nulla, ossia l'asse del razzo sia costantemente allineato con la direzione della velocità dell'aria che investe il razzo, e che le forze aerodinamiche presentino una simmetria rispetto all'asse del razzo (che quindi non deve avere ali, o pinne orientabili), ed inoltre che la spinta del motore agisca anch'essa lungo questo asse, ossia che l'angolo tra l'asse dell'ugello e l'asse del razzo, dovuto ad eventuali meccanismi di *gimbal* (snodo, vedi par. 2.2.1) dell'ugello stesso, o meccanismi equivalenti, sia anch'esso nullo. In tal caso le forze agenti sono la spinta F (che varia con la quota per effetto della diminuzione della pressione atmosferica, e con il tempo in particolare a causa della sequenza di stadiazione – ma anche, ad esempio, grani a propellente solido possono dare spinte non costanti), la resistenza aerodinamica D (la quale varia anch'essa con la quota per effetto della diminuzione della densità atmosferica, poi varia con la velocità dell'aria che investe il razzo, ed infine varia per effetto della sequenza di stadiazione, che può essere accompagnata da una riduzione della sezione frontale del lanciatore), ed infine la forza peso (la quale varia più debolmente con la quota, essendo l'accelerazione di gravità locale $g = \mu_T/r^2$, dove $\mu_T = G\, M_T$ è la costante di potenziale di sorgente della Terra, prodotto della costante di Newton per la massa della Terra stessa). Chiamiamo come detto ϵ l'angolo tra la direzione della velocità assoluta e l'asse del razzo, il quale ultimo per quanto ipotizzato in questo paragrafo coincide con la direzione della spinta.

Le forze agenti nella direzione dell'asse m sono quindi la componente della spinta F in tale direzione (che si ottiene quindi come $F\,\cos\epsilon$), la componente della resistenza aerodinamica D (che viene per convenzione assunta diretta secondo l'asse del razzo, vedi oltre) in tale direzione (quindi $-\,D\,\cos\epsilon$), ed infine la componente della forza peso $m\,g$, chiamata m la massa del razzo al tempo considerato, e g il valore dell'accelerazione di gravità alla quota considerata (quindi $-\,m\,g\,\sin\gamma$, essendo γ l'angolo tra la direzione della velocità assoluta e l'orizzontale, per cui l'angolo rispetto alla verticale diretta verso il basso è $\gamma + \pi/2$, il cui coseno è $-\sin\gamma$). Le forze agenti secondo la direzione dell'asse n sono le eventuali componenti della spinta e della resistenza in tale direzione ($F\,\sin\epsilon$, e $-\,D\,\sin\epsilon$), e la componente della forza peso, la quale forma un angolo $\gamma + \pi$ con la direzione dell'asse n, per cui la componente relativa è $-\,m\,g\,\cos\gamma$. Sostituendo tali forze nella (2.2), scritta secondo le direzioni (m, n), quindi con accelerazioni espresse da (2.11), si trovano infine le equazioni del moto, che esplicitiamo rispetto ai termini nelle derivate temporali della velocità assoluta e dell'angolo di volo:

$$\begin{cases} m\,\dot{v} \;=\; (F\,-\,D)\,\cos\epsilon\,-\,m\,g\,\sin\gamma \\ m\,v\,\dot{\gamma} \;=\; (F\,-\,D)\,\sin\epsilon\,-\,m\,g\,\cos\gamma\,+\,m\,\dfrac{v^2}{r}\,\cos\gamma \end{cases} \tag{2.12}$$

Osserviamo innanzitutto che solo la componente $F\,\cos\epsilon$ contribuisce ad accelerare il razzo (l'altra componente, $F\,\sin\epsilon$ contribuisce invece a far deviare la traiettoria, come vedremo tra breve). Questo suggerisce ovviamente di adottare valori di ϵ prossimi allo zero, ossia di allineare l'asse del razzo (quindi la direzione della spinta, sotto l'assunzione di angolo di *gimbal* nullo adottata in questo paragrafo) con la direzione della velocità assoluta. Questo tuttavia non è possibile nella fase di volo entro l'atmosfera, perché il lanciatore deve decollare verticalmente per attraversare gli strati più densi dell'atmosfera rapidamente (per contenere la resistenza aerodinamica); quindi nei primi istanti del volo l'angolo ϵ è prossimo a $\pi/2$, ossia la situazione peggiore ipotizzabile per quanto riguarda l'utilizzo della spinta per accelerare il veicolo. Quando il lanciatore comincia a salire in quota, la traiettoria viene progressivamente deviata dalla verticale, per avvicinarla alla direzione circonferenziale di iniezione in orbita (almeno per orbita circolare). Sarà tuttavia opportuno orientare l'asse del razzo secondo la direzione della velocità dell'aria relativa al razzo, sia per diminuire la sezione frontale offerta alla corrente d'aria che investe il lanciatore, sia come detto per evitare l'insorgere di forti carichi laterali. Possiamo ipotizzare, almeno in prima approssimazione, che l'atmosfera ruoti solidalmente con la Terra, quindi con velocità di trascinamento

$$\vec{v}_t \;=\; \vec{\omega}_T \times \vec{r} \tag{2.13}$$

dove ω_T indica la velocità angolare di rotazione della Terra $(2\,\pi/T_{sid})$, per cui la velocità dell'aria rispetto al razzo si ottiene dalla (2.1) come

$$\vec{v}_r \;=\; \vec{v}\,-\,\vec{v}_t \tag{2.14}$$

Occorre quindi allineare, nella fase iniziale del volo, l'asse del razzo con la velocità *relativa* (cioè fare in modo che $\epsilon = \chi$), piuttosto che con quella assoluta, il che comporta che solo una frazione $\cos\epsilon$, ovviamente minore di uno, della spinta serve ad accelerare il razzo. All'aumentare della velocità comunque l'angolo χ si riduce, come si può desumere dalla fig. 2.2 (la v_t resta sostanzialmente invariata, o meglio cresce di poco all'aumentare della quota h per la (2.13), dove $r = h + R_T$, essendo R_T il raggio della Terra, supposta sferica, che è molto maggiore di h, almeno per orbite basse; vedremo che le orbite alte sono conseguite in altro modo, per esempio trasferimenti alla Hohmann).

Man mano che il razzo sale in quota, l'atmosfera diventa sempre più rarefatta, per cui l'importanza della resistenza aerodinamica e dei carichi laterali diminuisce, finché fuori dell'atmosfera (o meglio, al disopra di una certa quota h_2, per esempio 100 o 120 km) sarà effettivamente possibile allineare F con v. Occorrerà quindi una transizione che porti l'asse del razzo, orientato secondo la direzione della velocità relativa all'atmosfera nelle prime fasi del volo, a ruotare gradualmente a partire da una certa quota h_1, per esempio 80 km, per sovrapporsi infine alla direzione della velocità assoluta alla quota h_2.

Per quanto riguarda gli altri termini della prima delle (2.12), la resistenza aerodinamica D tende ovviamente a frenare il moto del razzo, come pure la forza peso (almeno finché $\gamma > 0$, cioè finché il razzo punta verso l'alto).

Le diverse forze agenti a secondo membro della seconda delle (2.12) (ossia differenza tra spinta e resistenza aerodinamica, forza peso, forza centrifuga, tutte proiettate sull'asse n) hanno invece l'effetto di far deviare la traiettoria del razzo, in quanto provocano una variazione dell'angolo di volo γ. In particolare, la deviazione della traiettoria dovuta alla componente della forza peso in direzione n (secondo termine a secondo membro) prende il nome di *gravity turn*.

Da quanto visto emerge che il Δv effettivamente conseguito da un lanciatore sarà minore di quello postulato dall'equazione di Tsiolkowsky, come conseguenza dei seguenti tipi di perdite:

- gravitazionali, per effetto del termine in $-\,m\,g\,\sin\gamma$;
- aerodinamiche, per effetto del termine in $-\,D\,\cos\epsilon$
- per disallineamento, per effetto della differenza tra il termine in $F\,\cos\epsilon$ ed il valore massimo teoricamente conseguibile in assenza di disallineamento, cioè F.

Tali perdite saranno più esattamente quantificate nel successivo par. 2.1.2

2.1.2 Equazioni del moto traslazionale per incidenza aerodinamica ed angolo di *gimbal* non nulli

Affrontiamo ora il caso più generale, in cui tra l'asse del razzo e la velocità dell'aria ad esso relativa sussiste un angolo di incidenza aerodinamica α (quindi $\epsilon = \chi + \alpha$), e la direzione della spinta forma un angolo β con l'asse del razzo per effetto di un meccanismo di *gimbal*, o sistema equivalente. Sia α che β sono presi positivi in senso antiorario, vedi fig. 2.3.

L'incidenza aerodinamica comporta l'insorgere di una forza di portanza L, che assumiamo ortogonale all'asse del razzo (per coerenza con la precedente assunzione di resistenza D diretta secondo tale asse).

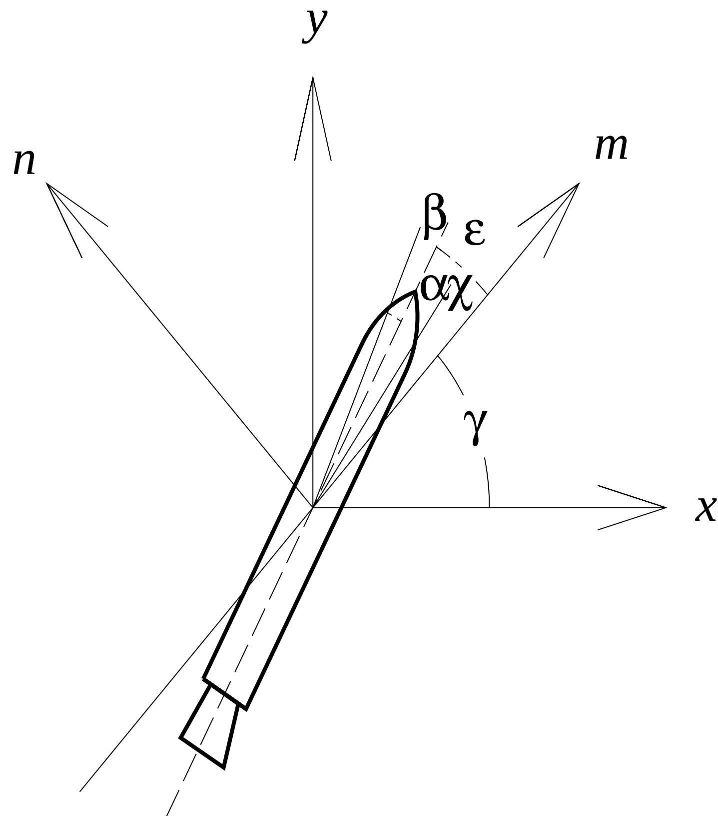


Figure 2.3: Sistemi di riferimento (x, y) e (m, n) in presenza di incidenza aerodinamica α ed angolo di gimbal β.

In questa situazione, le forze agenti in direzione m sono una componente della spinta $F\,\cos(\epsilon+\beta)$, essendo appunto $\epsilon+\beta$ l'angolo fra la direzione della velocità assoluta e la direzione della spinta, poi una resistenza aerodinamica ancora $-\,D\,\cos\epsilon$, una componente della portanza $-\,L\,\sin\epsilon$, essendo $\pi/2-\epsilon$ l'angolo tra la portanza e la direzione m, ed infine ancora la componente della forza peso $-\,m\,g\,\sin\gamma$. Le forze agenti in direzione n sono invece una componente della spinta $F\,\sin(\epsilon+\beta)$, una componente della resistenza aerodinamica ancora $-\,D\,\sin\epsilon$, poi una componente della portanza $L\,\cos\epsilon$, ed infine ancora la componente $-\,m\,g\,\cos\gamma$ della forza peso. Le equazioni del moto, in direzione m ed n, assumono pertanto la forma, ancora in base alle (2.2, 2.11),

$$\begin{cases} m\,\dot{v} = F\,\cos(\epsilon + \beta) - D\,\cos\epsilon - L\,\sin\epsilon - m\,g\,\sin\gamma \\ m\,v\,\dot{\gamma} = F\,\sin(\epsilon + \beta) - D\,\sin\epsilon + L\,\cos\epsilon - m\,g\,\cos\gamma + m\,\dfrac{v^2}{r}\cos\gamma \end{cases} \tag{2.15}$$

Vedremo fra breve che la presenza di una portanza, e di un angolo di *gimbal*, comportano l'insorgere di un'ulteriore componente di perdite aerodinamiche, e di perdite per *steering*, cioè per effetto degli angoli di *gimbal* imposti durante la fase di ascesa per guidare il lanciatore lungo la traiettoria desiderata. Inoltre possiamo vedere dalla seconda delle (2.15) che anche il sussistere di un angolo di *gimbal* e la portanza compaiono tra le cause che contribuiscono a far deviare la traiettoria del razzo (in effetti, l'angolo di *gimbal* viene introdotto proprio allo scopo di guidare il razzo).

Analizziamo ora l'espressione delle forze aerodinamiche. Come già accennato, si assume in questo caso la resistenza D comunque orientata secondo l'asse del razzo, e la portanza L orientata secondo la normale a tale asse (contrariamente alla convenzione generalmente adottata in aerodinamica, in cui si assume la resistenza, indicata per esempio come D', parallela ed opposta alla direzione della corrente d'aria che investe il corpo, e la portanza L' normale a quest'ultima direzione); tale particolare assunzione è conveniente nel caso considerato per la presenza di un chiaro asse di riferimento, che è per l'appunto l'asse del razzo. Volendo si potrebbero esprimere D ed L tramite D' e L', attraverso l'incidenza aerodinamica α:

$$D = D'\,\cos\alpha + L'\,\sin\alpha \tag{2.16}$$

$$L = -\,D'\,\sin\alpha + L'\,\cos\alpha \tag{2.17}$$

Ad ogni modo, con la definizione sopra indicata per D e L, queste risultano essere funzioni, assegnata la forma geometrica del lanciatore (se questo non presenta pinne orientabili), dell'angolo di incidenza aerodinamica α, della densità atmosferica (quindi della quota h, o equivalentemente del raggio misurato dal centro della Terra r), del numero di Mach M_r del moto relativo dell'aria rispetto al razzo, nonché dell'area offerta al flusso, per la quale per convenzione viene adottato il valore della sezione frontale A del lanciatore (la quale ovviamente può variare nel corso della traiettoria di salita per effetto della sequenza di stadiazione). Resistenza e portanza sono pertanto esprimibili secondo le espressioni

$$D = c_D(\alpha, M_r)\,\frac{\rho\, v_r^2}{2}\,A \qquad (2.18)$$

$$L = c_L(\alpha, M_r)\,\frac{\rho\, v_r^2}{2}\,A \qquad (2.19)$$

nelle quali i coefficienti di resistenza c_D e portanza c_L tengono conto della dipendenza dalla forma, dall'angolo di incidenza aerodinamica, e dal numero di Mach, mentre $\rho\, v_r^2/2$ è la pressione dinamica del moto relativo all'atmosfera. Tipici andamenti di c_D e c_L per un lanciatore, in funzione del numero di Mach (del moto relativo all'atmosfera) e con l'incidenza aerodinamica come parametro, sono riportati in fig. 2.4.

Si può osservare che tali coefficienti presentano un massimo intorno alla zona transonica, per poi decrescere costantemente all'aumentare del numero di Mach; inoltre, essi crescono all'aumentare dell'angolo di incidenza.

Nel caso in cui il razzo sia dotato di pinne orientabili, queste possone essere usate per guidare il razzo lungo la sua traiettoria, in alternativa al meccanismo di *gimbal*, però solo limitatamente agli archi di traiettoria descritti entro l'atmosfera. In questo caso quindi i coefficienti di resistenza e portanza saranno funzione anche dell'angolo di deflessione delle pinne, che indichiamo con β' per sottolineare che esso[3] svolge un ruolo analogo a quello dell'angolo di *gimbal*:

$$c_D = c_D(\alpha, \beta', M_r) \qquad (2.20)$$

$$c_L = c_L(\alpha, \beta', M_r) \qquad (2.21)$$

Ne segue che le espressioni di resistenza e portanza assumono, in presenza di pinne orientabili, la seguente dipendenza funzionale

$$D = D(\alpha, \beta', M_r, h, A) \qquad (2.22)$$

$$L = L(\alpha, \beta', M_r, h, A) \qquad (2.23)$$

[3]Si osservi che in effetti β' può ben essere un vettore, in quanto si possono avere angoli di deflessione diversi per le varie pinne.

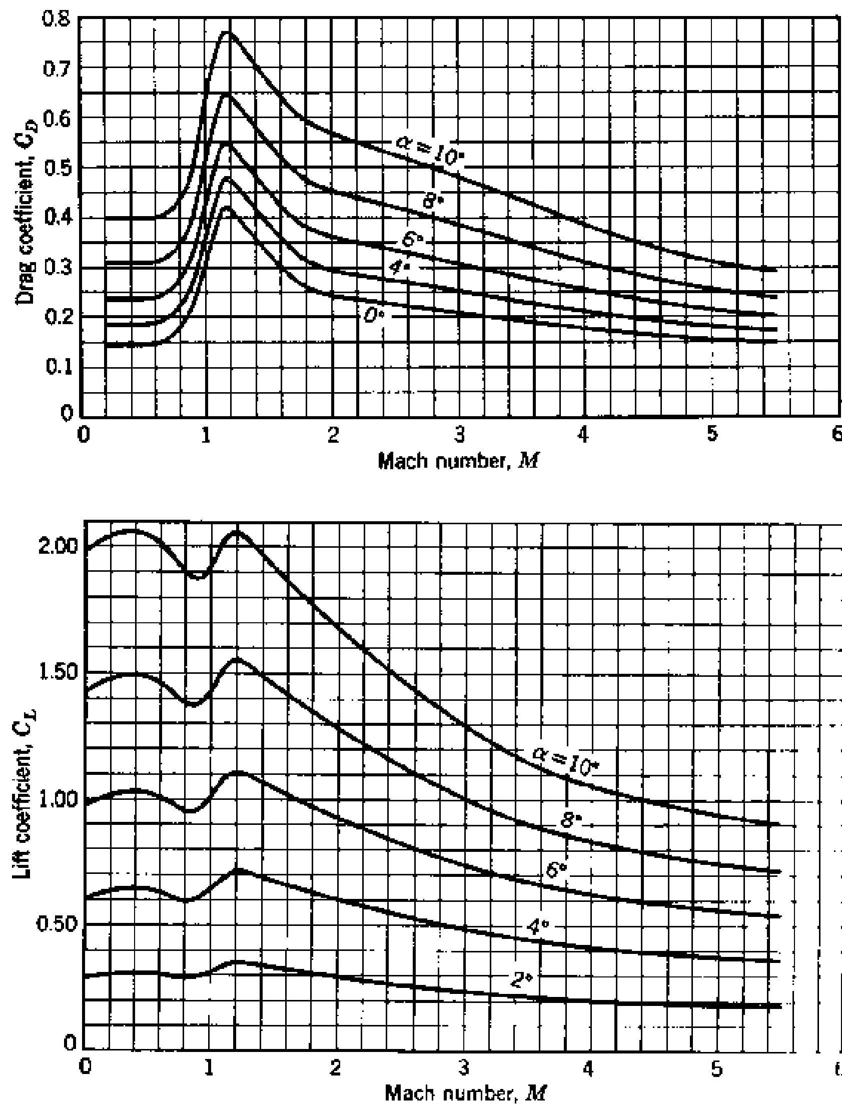


Figure 2.4: Andamenti tipici dei coefficienti di resistenza (alto) e di portanza (basso) di un lanciatore in funzione del numero di Mach (del moto relativo all'atmosfera) e dell'angolo d'attacco, da [8].

dove in particolare la dipendenza dalla quota h si riferisce all'effetto sulla densità e sulla velocità del suono (la quale permette di esprimere la velocità relativa come $v_r = a\, M_r$).

2.1.3 Perdite propulsive

Dalla prima delle (2.15) si evincono le espressioni per i vari tipi di perdite propulsive che hanno luogo durante la fase di salita del razzo; occorre dividere per m (per ottenere $\dot{v}$), integrare quindi rispetto al tempo (per ottenere Δv), e valutare quindi le perdite che si hanno rispetto al caso ideale considerato negli sviluppi per ricavare l'equazione di Tsiolkowsky, per poter valutare l'incremento di velocità (differenza tra velocità iniziale e finale) realmente conseguito come

$$v_f \; - \; v_0 \; = = \; \Delta v_{Tsiolkowsky} \; - \; \Delta v_{losses} = \; - \, c \, \log MR \; - \; \Delta v_{losses} \tag{2.24}$$

dove per quanto detto le perdite possono essere ascritte ai vari effetti citati:

$$\Delta v_{losses} \; = \; \Delta v_{grav} \; + \; \Delta v_{aerodin} \; + \; \Delta v_{dis} \; + \; \Delta v_{steer} \tag{2.25}$$

In particolare, le perdite gravitazionali si ricavano facilmente integrando l'eq. per $\dot{v}$ tra l'istante iniziale (indice 0, accensione dei motori del primo stadio) e l'istante finale (indice f, spegnimento dei motori dell'ultimo stadio, o *burnout*) come

$$\Delta v_{grav} \; = \; \int_0^f g(r) \, \sin \gamma \, dt \tag{2.26}$$

Analogamente, le perdite aerodinamiche (dovute sia alla resistenza che alla portanza) si ottengono come

$$\Delta v_{aerodin} \; = \; \int_0^f \left(\frac{D}{m} \cos \epsilon \; + \; \frac{L}{m} \sin \epsilon \right) \, dt \tag{2.27}$$

Per contabilizzare le perdite dovute al fatto che la direzione della spinta non coincide con la direzione della velocità assoluta, conviene decomporre il termine della prima delle (2.15) in cui compare la spinta come

$$F \; \cos(\epsilon \, + \, \beta) \; = \; F \, \cos \epsilon \; - \; [F \, \cos \epsilon \; - \; F \, \cos(\epsilon \, + \, \beta)] \tag{2.28}$$

per cui la perdita per disallineamento, cioè dovuta al fatto che solo una componente $F\cos\epsilon$ (anziché l'intera F) della spinta risulta utile per accelerare il veicolo, è

$$\Delta v_{dis} \;=\; \int_0^f \frac{F}{m}\,(1\,-\,\cos\epsilon)\,dt \tag{2.29}$$

mentre l'ulteriore perdita per *steering*, cioè dovuta al fatto che per guidare il lanciatore lungo la traiettoria di salita considerata è necessario applicare un certo angolo di *gimbal*, risulta esprimibile come

$$\Delta v_{steer} \;=\; \int_0^f \frac{F}{m}\,[\cos\epsilon\,-\,\cos(\epsilon\,+\,\beta)]\,dt \tag{2.30}$$

È appena il caso di osservare che tutte le grandezze che compaiono negli integrandi delle (2.26–2.30) sono funzioni del tempo.

Le espressioni sopra riportate per i vari tipi di perdite forniscono anche indicazioni di principio su come tentare di limitarle. Per quanto riguarda le perdite gravitazionali (2.26), osserviamo che esse sono tanto più basse quanto più l'angolo di volo γ è prossimo a zero. Questo suggerirebbe di far partire il lanciatore con asse orizzontale, anziché verticale, ma questo porterebbe ad una lunga porzione della traiettoria sviluppata entro l'atmosfera, con conseguenti forti perdite aerodinamiche. L'altro fattore sul quale si può agire per contenere le perdite gravitazionali è il tempo di spinta, riducendo il quale si riducono evidentemente le perdite, in base all'espressione (2.26); questo però può essere ottenuto solo aumentando la spinta (per lasciare invariato l'impulso totale $F \cdot t_b$), ma comporta di conseguenza una maggiore massa dei motori, ed un maggior valore dell'accelerazione finale cui il carico utile è sottoposto, vedi par. 1.4.1. Per contenere le perdite aerodinamiche (2.27) occorre contenere D e L utilizzando forme a bassa resistenza aerodinamica, angoli di incidenza prossimi allo zero, e seguire traiettorie di salita che consentano di attraversare rapidamente gli strati più densi dell'atmosfera, quindi inizialmente verticali o quasi. Si osservi poi che l'entità di tali perdite è proporzionale al rapporto D/m, o L/m, del lanciatore, dove tanto D che L sono proporzionali all'area frontale A del lanciatore, mentre la massa m è proporzionale al suo volume V. Quindi D/m, o L/m, risultano proporzionali al rapporto A/V del lanciatore, che decresce evidentemente all'aumentare delle dimensioni del lanciatore; si può pertanto intuire che le perdite aerodinamiche sono relativamente poco importanti per lanciatori di grandi dimensioni. Per contenere le perdite

per disallineamento (2.29) l'unico mezzo è avvicinare ϵ a zero, ma questo si scontra come detto con esigenze dettate da resistenza aerodinamica e strutturale. Infine, per contenere le perdite per *steering* (2.30) occorrerebbe anche in questo caso contenere l'angolo β, che però è dettato da esigenze di guida. Si comprende quindi come il problema di minimizzare la *somma* delle perdite propulsive corrisponda alla ricerca di un compromesso (*trade–off*) tra esigenze contrastanti.

2.1.4 Condizioni al contorno

Le eq. (2.15) possono, come detto, essere esplicitate rispetto a $\dot{v}$ e $\dot{\gamma}$, ed integrate nel tempo per ricavare la velocità assoluta e l'angolo di volo al generico tempo t. Negli integrandi di queste equazioni compaiono alcuni termini che dipendono da r, o equivalentemente dalla quota $h = r - R_T$, come l'accelerazione di gravità, la densità atmosferica che entra nelle espressioni (2.18, 2.19) della resistenza aerodinamica e della portanza; sarà perciò necessario integrare anche la prima delle (2.7) per ottenere r come funzione di t (ed eventualmente anche la seconda, esplicitata rispetto a $\dot{\theta}$, se si desidera seguire la posizione del lanciatore rispetto alla superficie terrestre, per esigenze di *tracking*, individuazione del punto di caduta degli stadi esauriti, vincoli di non sorvolare zone abitate, posizionamento del satellite all'iniezione in orbita, etc.). Il sistema da risolvere è pertanto simbolicamente (le espressioni esatte degli integrandi si ricavano come accennato) del tipo

$$\begin{cases} v = \int_0^t \dot{v}\, dt \\ \gamma = \int_0^t \dot{\gamma}\, dt \\ r = \int_0^t \dot{r}\, dt \\ \theta = \int_0^t \dot{\theta}\, dt \end{cases} \tag{2.31}$$

dove l'integrazione è condotta tra l'istante iniziale ($t = 0$), e l'istante generico, per avere i valori di $v(t)$, $\gamma(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$ per ogni t, ed in particolare per l'istante di spegnimento dei motori dell'ultimo stadio, designato con l'indice f.

L'integrazione del sistema (2.31) è soggetta a specifiche condizioni iniziali e finali.

Le condizioni iniziali sono relative alla posizione, la velocità e l'assetto del lanciatore al momento del decollo. La posizione è individuata dal raggio r che, supponendo in prima approssimazione la Terra

sferica, risulta uguale a R_T, nonché dall'angolo θ, che per quanto stabilito nel commento alla fig. 2.2 risulta per definizione pari a zero al decollo. Si noti che in generale per individuare la posizione di un punto sulla superficie terrestre occorrono *due* angoli (per esempio latitudine e longitudine), ma occorre ricordare che stiamo considerando il caso di moto piano, per cui l'inclinazione i della traiettoria rispetto al piano equatoriale è assegnata, e basta quindi un ulteriore singolo angolo (θ, appunto) per stabilire univocamente la posizione di un punto. Per quanto riguarda la velocità assoluta v all'istante iniziale, essa coincide con la componente della velocità di rotazione terrestre nel piano della traiettoria di salita, data da

$$v_0 \;=\; v_{T,eq}\,\cos i \tag{2.32}$$

dove v_T è la velocità dovuta alla rotazione della Terra ad una latitudine Λ generica (uguale a $\omega_T\, r_T\, \cos\Lambda$), e $v_{T,eq}$ la corrispondente velocità all'equatore. La condizione iniziale per γ è zero (il razzo al decollo possiede solo una velocità *assoluta* tangenziale alla superficie terrestre, dovuta appunto alla rotazione della Terra, essendo ancora nulla velocità di ascesa verticale).

Le condizioni finali invece sono quelle relative all'iniezione nell'orbita desiderata. Se per esempio si desidera raggiungere un'orbita circolare, esse comprendono il raggio r (o equivalentemente la quota h) dell'orbita desiderata, la velocità (che dovrà necessariamente essere uguale alla velocità di orbitazione circolare $\sqrt{\mu_T/r}$), e l'angolo di volo che dovrà essere nullo. Potrebbe eventualmente aversi una quarta condizione, che il satellite al momento dell'iniezione si trovi in un punto particolare dell'orbita, il che comporta un vincolo addizionale su θ all'iniezione. Nel caso di un'orbita ellittica, le condizioni finali includono un raggio (od una quota) d'iniezione, la corrispondente velocità, ed un angolo di volo generalmente non nullo (a meno che il satellite non venga iniettato in orbita esattamente al perigeo, o meno realisticamente, all'apogeo). Condizioni analoghe si applicano ad iniezione in orbite paraboliche o iperboliche.

Allo scopo di evidenziare le condizioni finali necessarie per raggiungere l'orbita desiderata, determiniamo i parametri dell'orbita che viene conseguita alla spegnimento dei motori dell'ultimo stadio, in funzione dei valori di raggio, velocità ed angolo di volo finali (r, v, γ). Sappiamo che le grandezze energia meccanica totale (per unità di massa) $\mathcal{E}$ e momento angolare $\hat{h}$ sono costanti per una data orbita, quindi i valori determinati allo spegnimento dei motori le identificano univocamente ([1], par. 1.7):

$$\mathcal{E} \;=\; \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \tag{2.33}$$

$$\hat{h} = r\, v\, \sin(\pi/2 - \gamma) = r\, v\, \cos\gamma \tag{2.34}$$

essendo l'angolo compreso tra il raggio vettore $\vec{r}$ ed il vettore velocità $\vec{v}$ pari appunto a $\pi/2 - \gamma$. L'energia meccanica totale può anche essere espressa in funzione del semiasse maggiore dell'orbita conseguita ([1], par. 1.10)

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2\,a} \tag{2.35}$$

per cui tale semiasse maggiore risulta determinato in base ai valori di v ed r allo spegnimento, attraverso la (2.33), come

$$a = -\frac{\mu}{2\,\mathcal{E}} \tag{2.36}$$

Il momento angolare può venire espresso attraverso i valori al perigeo (dove l'angolo di volo è nullo) come

$$\hat{h} = r_p\, v_p \tag{2.37}$$

Ovviamente anche l'energia meccanica totale può essere espressa attraverso i valori al perigeo

$$\mathcal{E} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_p} = -\frac{\mu}{2\,a} \tag{2.38}$$

che consente di ricavare il quadrato della velocità di perigeo come

$$v_p^2 = \mu\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right) \tag{2.39}$$

Sostituendo questa espressione nella (2.37) elevata al quadrato, si ottiene

$$\hat{h}^2 \;=\; \mu\, r_p \left(2 \,-\, \frac{r_p}{a}\right) \tag{2.40}$$

dove il raggio di perigeo è anche esprimibile come ([1], par. 1.10)

$$r_p \;=\; a\,(1 \,-\, e) \tag{2.41}$$

essendo e l'eccentricità dell'orbita conseguita, per cui

$$\hat{h}^2 \;=\; \mu\, a\,(1 \,-\, e)\,[2 \,-\, (1 \,-\, e)] \;=\; \mu\, a\,(1 \,-\, e^2) \tag{2.42}$$

Questa espressione consente di esprimere l'eccentricità ancora in funzione dei valori di (r, v, γ) allo spegnimento come

$$e \;=\; \sqrt{1 \,-\, \frac{\hat{h}^2}{\mu\, a}} \tag{2.43}$$

Sottoliniamo che queste relazioni sono valide per orbite ellittiche, paraboliche, iperboliche.

La tabella seguente riporta i valori dei Δv dovuti ai vari tipi di perdite, e del Δv efficace conseguentemente richiesto, per alcuni lanciatori, relativi a LEO. Sono indicati, per ciascun lanciatore, le quote di perigeo ed apogeo, l'inclinazione, la velocità idealmente richiesta per l'iniezione in LEO, le perdite ripartite secondo le quattro categorie citate, il Δv complessivo delle perdite (somma dei precedenti), la velocità iniziale del lanciatore al decollo (componente nel piano dell'orbita) per effetto del moto di rotazione della Terra, che dipende come detto dall'inclinazione dell'orbita obiettivo secondo la (2.32), ed infine il Δv efficace complessivamente richiesto, legato ai precedenti dalla

$$\Delta v \;=\; v_{LEO} \,+\, \Delta v_{losses} \,-\, v_0 \tag{2.44}$$

Le quote sono espresse in chilometri, l'inclinazione in gradi, le velocità in m/s. Si osservi che questi dati sono compilati partendo da fonti diverse, non omogenee tra loro, per cui per esempio le perdite per disallineamento sono esplicitamente riportate solo per il lanciatore Ariane 3 (peraltro fuori servizio dai primi anni '80), mentre per gli altri viene riportata solo la somma delle perdite gravitazionali e

per disallineamento. Sempre per l'Ariane 3, non sono invece esplicitamente indicate le perdite per *steering*. Per i lanciatori Ariane 44L e Space Shuttle, i dati riportati sono congetturali (perché per esempio l'orbita nominale dell'Ariane 44 L è un'orbita ellittica di trasferimento geostazionaria, o GTO – *Geostationary Transfer Orbit*, non una LEO).

lanciatore	h_p	h_a	i	v_{LEO}	Δv_{grav}	Δv_{dis}	$\Delta v_{aerodin}$	Δv_{steer}	Δv_{losses}	v_0	Δv
Ariane 3	200	200	7,0	7784	830	800	120	...	1750+	-413	9121+
Atlas I	149	607	27,4	7946	1395		110	167	1672	-375	9243
Delta 7925	175	319	33,9	7842	1150		136	33	1319	-347	8814
Saturn V	176	176	28,5	7798	1534		40	243	1817	-348	9267
Titan IV/ Centaur	157	463	28,6	7896	1442		156	65	1663	-352	9207
Ariane 44L	170	170	7,0	7802	1576		135	38	1749	-413	9138
Space Shuttle	-196	278	28,5	7798	1222		107	358	1687	-395	9086

Per l'Ariane 3, la cui LEO di riferimento è un'orbita circolare di altezza 200 km ed inclinazione 7°, le perdite gravitazionali assommano a 830 m/s, quelle per disallineamento a 800 m/s, mentre quelle aerodinamiche a 120 m/s, per cui complessivamente le perdite superano i 1750 m/s (si ricordi che non sono riportate le perdite per *steering*). Il Δv efficace richiesto, tenendo conto vella velocità iniziale, risulta quindi essere di almeno 9121 m/s (andrebbero aggiunte le perdite per *steering*). Si osservi comunque che perdite gravitazionali e per disallineamento quasi si equivalgono, mentre quelle aerodinamiche sono alquanto più contenute. L'entità delle perdite gravitazionali aumenta comunque ovviamente con l'altezza dell'orbita. Per il lanciatore Atlas I (anch'esso fuori servizio da lungo tempo), la cui LEO di riferimento è invece ellittica, è riportata (come per i lanciatori seguenti) solo la somma di Δv_{grav} e Δv_{dis}, che in questo caso assomma a 1395 m/s; le perdite aerodinamiche sono ancora alquanto più contenute, intorno ai 110 m/s, e di un ordine di grandezze simile risultano le perdite per *steering*, che ammontano a 167 m/s. Complessivamente si hanno perdite per 1672 m/s, che sommate ai 7946 m/s idealmente richiesti per iniettare il carico utile in orbita, danno 9618 m/s; sottraendo la componente di velocità iniziale di 375 m/s dovuta al moto di rotazione della Terra, si vede che occorre conferire al carico utile un Δv efficace di 9243 m/s. Esaminando i dati relativi agli altri lanciatori, si vede che in generale la somma delle perdite propulsive è tipicamente compresa tra i 1600 ed i 1800 m/s (fa eccezione il Delta 7925, per il quale sono riportate perdite significativamente più basse, 1319 m/s). Si può anche notare che il Δv efficace richiesto per conseguire una LEO è tipicamente intorno ai 9000 m/s o poco più, valore che quindi prenderemo come riferimento per questo tipo di orbita.

2.2 Guida e controllo del lanciatore

Vogliamo ora appena accennare ai problemi legati alla guida ed al controllo del lanciatore.

Per *guida* del lanciatore si intende la definizione di una legge temporale, che specifichi per esempio l'angolo che l'asse del razzo deve formare in ogni istante con l'orizzontale locale, che possiamo chiamare *angolo di assetto* ϑ, e che è evidentemente la somma dell'angolo di volo e dell'angolo ϵ, quindi una

$$\vartheta(t) = \gamma(t) + \epsilon(t) \tag{2.45}$$

per poter conseguire l'orbita desiderata nel modo ottimale (ossia con il massimo carico utile).

Per *controllo* del lanciatore si intende invece la definizione di una legge temporale, che specifichi l'angolo di *gimbal* necessario perché il lanciatore possa effettivamente seguire la legge di guida sopra identificata:

$$\beta = \beta(t) \tag{2.46}$$

Posto in altri termini, la guida concerne il moto del centro di massa del razzo, mentre il controllo si riferisce al moto intorno al baricentro. Questi due aspetti sono evidentemente strettamente correlati, in quanto le esigenze di guida definiscono i requisiti di controllo.

Diamo ora un rapido cenno ai principali problemi associati con la definizione di una legge di guida ottimale del lanciatore. Gli obiettivi sono, come detto, quello di conseguire l'orbita desiderata, e di immettere in orbita il massimo carico utile possibile. La traiettoria comprende un primo tratto di salita verticale, per attraversare rapidamente gli strati più densi dell'atmosfera, e contenere quindi le perdite aerodinamiche. La traiettoria viene poi fatta progressivamente deviare dalla verticale (manovra di *pitch–over*), per indirizzarla verso la direzione che la velocità dovrà assumere al momento dell'iniezione in orbita (per esempio, nel caso di orbita circolare, la direzione circonferenziale). Per iniziare la manovra di *pitch–over* occorre quindi applicare inizialmente un certo angolo di *gimbal* β, dopodiché la deflessione della traiettoria prosegue sotto l'azione della spinta e della resistenza (in presenza di un angolo $\epsilon \neq 0$), della portanza (in presenza di un angolo $\alpha \neq 0$), e della gravità; il *gimbal* sarà poi ulteriormente applicato per conseguire la traiettoria desiderata, o per correggere eventuali deviazioni dalla stessa. La spinta non viene generalmente applicata con continuità sino all'inserimento in orbita, ma si ha normalmente una fase di *coast* (volo a motore spento) tra lo spegnimento del penultimo stadio e l'accensione dell'ultimo, oppure tra due successive accensioni del motore dell'ultimo stadio (nel caso questo sia riaccendibile). Questo permette di avvicinare in

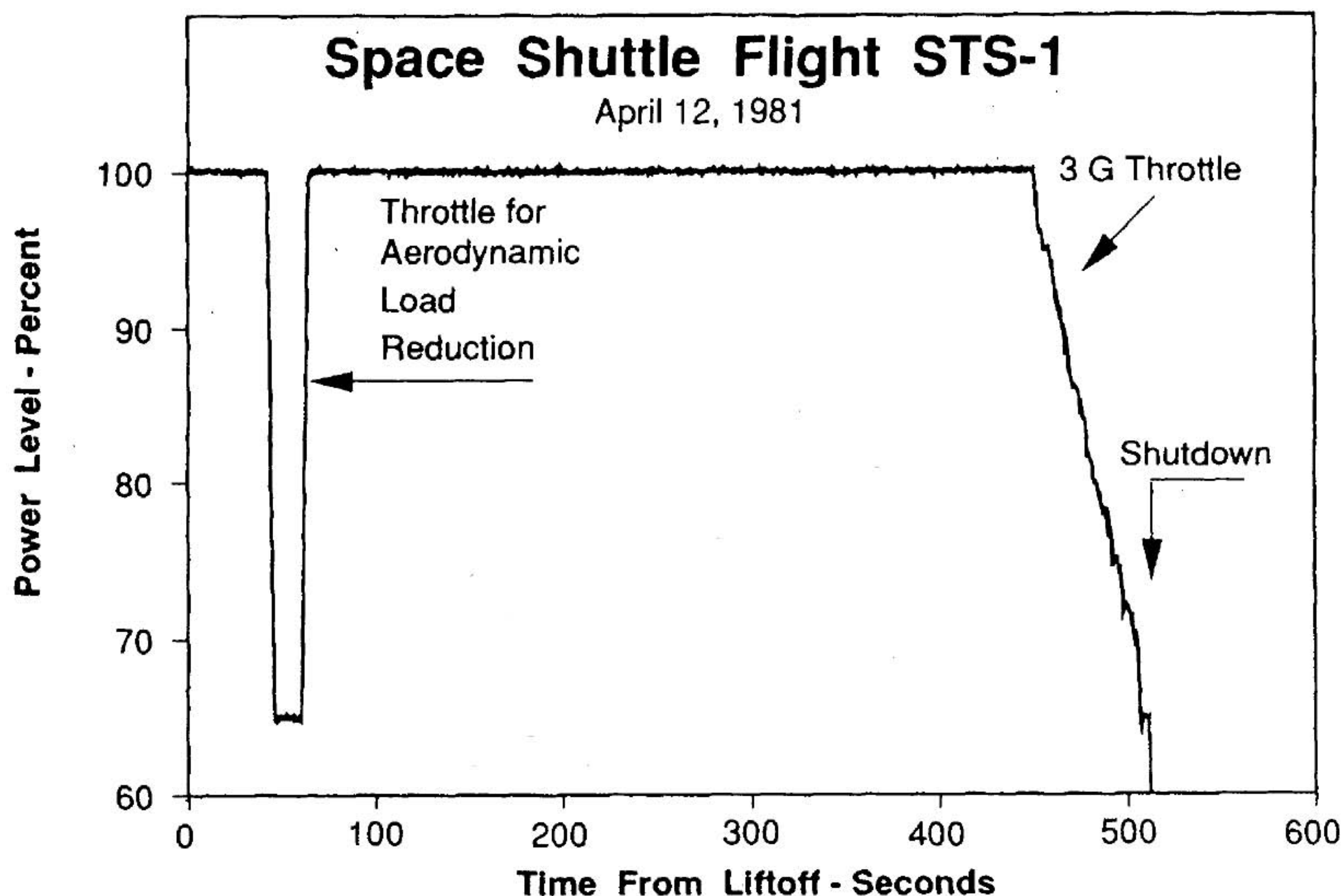


Figure 2.5: Spinta dei motori SSME in funzione del tempo, da [9].

qualche modo la traiettoria di salita ad un trasferimento alla Hohmann, che (entro certi limiti) è la manovra più economica per il conseguimento di un'orbita alta (o almeno, in questo contesto, più alta di quella conseguita allo spegnimento dei motori del penultimo stadio, o al primo spegnimento dei motori dell'ultimo stadio, se riaccendibile). La traiettoria di salita deve tuttavia soddisfare diversi vincoli: a) la pressione dinamica che si viene a creare sul lanciatore e sul *fairing* (struttura di protezione, che comprende lo scudo termico) del carico utile deve essere inferiore al valore massimo da questi sopportabili, b) il carico termico (per effetto del riscaldamento aerodinamico) deve anch'esso rispettare analoghi vincoli, c) bisogna evitare di sorvolare zone abitate, per evitare rischi in caso di malfunzionamento del lanciatore, d) analogamente, bisogna evitare la ricaduta degli stadi esauriti in zone abitate. Per soddisfare i vincoli a) e b), in alcuni lanciatori la spinta F viene opportunamente modulata in funzione del tempo t dal decollo; per esempio nello Space Shuttle, in una determinata fase della traiettoria di ascesa, la spinta dei tre motori principali dell'Orbiter (detti SSME, *Space*

Shuttle Main Engine) viene ridotta al 65% del valore nominale appunto per contenere la pressione dinamica, vedi fig. 2.5, nella quale si può anche notare che verso la fine della fase propulsa, quando la massa dell'Orbiter si è notevolmente ridotta per effetto del consumo di propellenti, la spinta viene ridotta per contenere l'accelerazione massima cui è sottoposto l'equipaggio al confortevole livello di 3 g. In alcuni *boosters* a propellente solido un risultato analogo viene ottenuto grazie ad un particolare disegno del grano di propellente solido, che consente di ridurre la superficie di combustione, quindi la spinta, nei momenti più critici; ovviamente però in tali motori la $F(t)$, una volta disegnato il grano, non è modificabile (a parte gli effetti dovuti alla temperatura del grano), come invece può avvenire in endoreattori a propellenti liquidi. Il conseguimento degli obiettivi c) e d) impone restrizioni sull'azimuth di lancio, vedi par. 2.6. Manovre che implicano (limitati) scostamenti dall'assunzione di orbita piana, quindi manovre tridimensionali, dette anche *dog–legs*, possono anche essere impiegate a questo scopo. Si osservi comunque che, fatta eccezione per il caso di lancio da una base equatoriale verso un'orbita anch'essa equatoriale, tutte le traiettorie di salita comportano effetti tridimensionali, in quanto la direzione della componente, dovuta alla rotazione terrestre, della corrente atmosferica che investe il lanciatore è sempre diretta secondo i paralleli.

Passiamo ora ad un rapido cenno ai problemi legati al controllo del lanciatore. L'obiettivo del controllo è quello orientare l'asse del razzo in modo tale che esso segua nel tempo la legge di guida desiderata, del tipo (2.45). Questo richiede un meccanismo di *gimbal*, il quale consenta di deviare la spinta di un angolo β rispetto all'asse del razzo, vedi fig. 2.3, oppure meccanismi equivalenti, quali superfici aerodinamiche (pinne) che consentano di orientare l'asse del razzo come desiderato (le superfici aerodinamiche sono però inefficaci al difuori dell'atmosfera, occorre in tal caso ricorrere ad un sistema di controllo d'assetto o ACS, *Attitude Control System*). Alcune di queste soluzioni sono anche illustrate in fig. 2.6, nella quale il pannello a) esemplifica il ricorso a superfici aerodinamiche orientabili per deviare la traiettoria del razzo, ed il pannello e) mostra un sistema di controllo dell'assetto mediante propulsori ausiliari. Nella scelta del sistema di controllo del lanciatore occorre valutare i pro ed i contro delle varie soluzioni; sistemi con *gimbal* sono complessi e relativamente pesanti, ma sistemi basati su pinne introducono, oltre al peso delle pinne, anche una resistenza aerodinamica addizionale; gli ACS implicano numerosi motori extra, ed il propellente per azionarli, etc. Il problema del controllo è poi strettamente legato a quello della stabilità, al quale sarà dedicato un cenno nel par. 2.3.

2.2.1 *Thrust Vector Control* (TVC)

Esaminiamo ora i diversi concetti utilizzabili per controllare la direzione del vettore spinta (*Thrust Vector Control*, o TVC), ossia per introdurre un angolo β, che abbiamo chiamato angolo di *gim-*

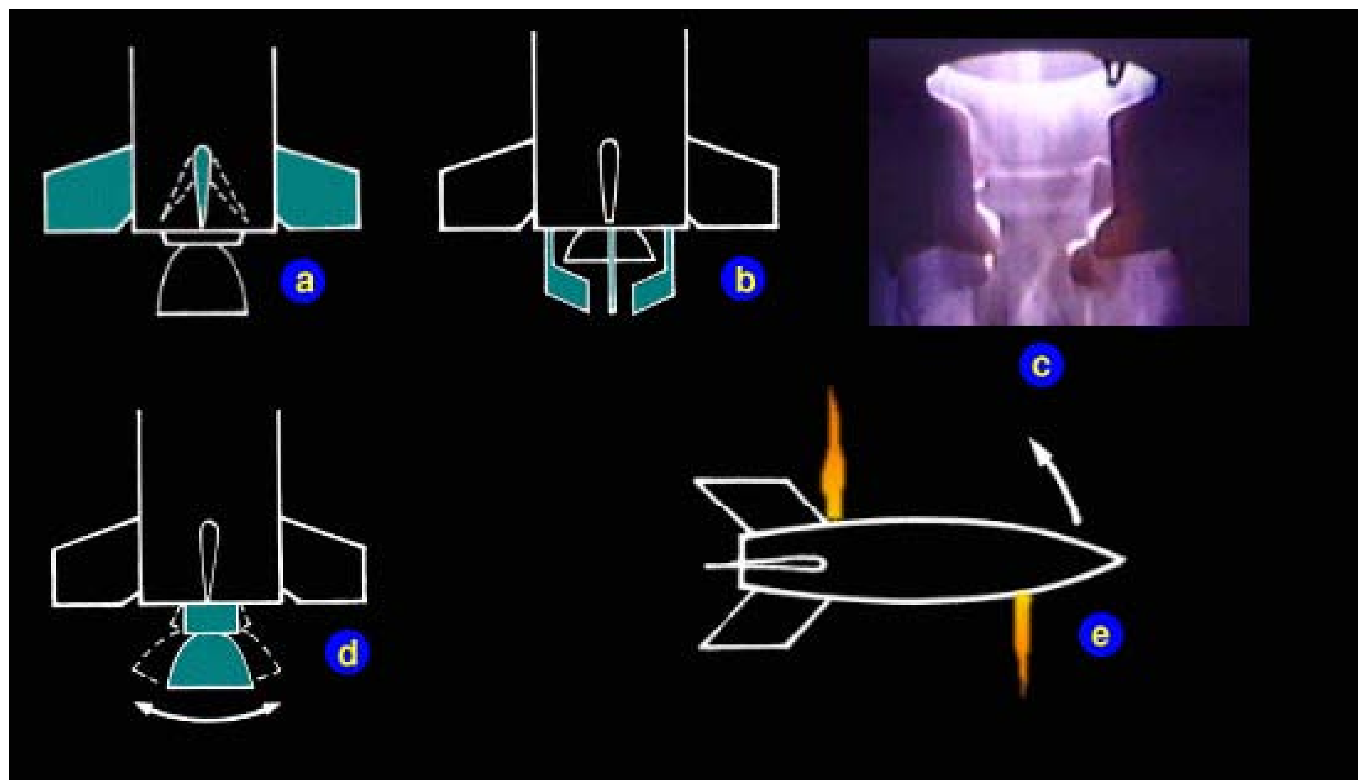


Figure 2.6: Configurazioni per lo *steering* del lanciatore: a) pinne orientali, b,d) TVC (*Thrust Vector Control*, e) ACS *Attitude Control System*, da [10].

bal, tra la direzione della spinta e la direzione dell'asse del razzo, vedi fig. 2.7. Alcuni di questi concetti sono applicabili solo ad endoreattori a propellenti liquidi, altri solo ad endoreattori a propellenti solidi, mentre alcuni sono applicabili ad entrambi. Negli endoreattori a propellenti liquidi la soluzione classica è quella di montare l'intero motore su uno snodo orientabile secondo due assi, in modo da poter orientare la direzione della spinta; sono poi necessari opportuni attuatori per muovere il motore come desiderato. Questa disposizione non è adottabile nei motori a propellenti solidi (nei quali l'ugello e la cassa che contiene il grano di propellente che brucia formano un insieme unico); in questi motori ci si limita ad orientare solo l'ugello, introducendo un giunto formato da tante coppie di lamine di materiale metallico e plastico alternate, le quali possono scorrere tra di loro, sotto l'azione di opportuni attuatori. Si tenga comunque presente che una buona parte della spinta (quella prodotta nella sezione divergente dell'ugello) si scarica sulla sezione di gola dell'ugello stesso, per cui questo meccanismo di orientazione dell'ugello deve essere notevolmente robusto; una soluzione equivalente è quella di uno snodo in un solo blocco, sempre in prossimità della gola dell'ugello. Soluzioni che invece non prevedono l'uso di snodi anche possibili. Si possono per esempio inserire

palettature orientabili in prossimità della sezione di uscita dell'ugello (tanto per endoreattori a propellenti liquidi che solidi), che consentono quindi di orientare la direzione della spinta; le pale però introducono un'ostruzione del flusso che porta ad una, pur limitata, perdita di spinta, e quindi di velocità efficace d'uscita, ed inoltre sono sottoposte ad un'elevata temperatura per cui vanno incontro a forte erosione. Un'altra soluzione per deviare il getto è quello dello *jetavator*, utilizzato sui motori a propellente solido del missile Polaris, lanciato da sottomarini, che consiste in un anello intorno alla parte terminale dell'ugello, che quando è richiesta una deviazione della spinta viene ruotato in modo tale da interferire con il getto; in questo caso si ha ancora una certa riduzione delle prestazioni, ed un'esposizione dell'anello ad elevate temperature, ma queste sono limitate agli intervalli di tempo in cui è richiesta appunto una deviazione della spinta (mentre nella configurazione precedentemente esaminata questi effetti permangono durante tutto il tempo operativo del motore). Ancora, si possono inserire, quando è richiesta una deviazione della spinta, una o più *jet tabs* nel getto principale, ancora con riduzione temporanea delle prestazioni, ed esposizione ad alte temperature anch'essa temporanea. Un sistema che non prevede parti in moto (se non valvole) è quello che ricorre all'iniezione di getti addizionali di propellente nella sezione divergente dell'ugello, i quali pertanto provocano l'insorgere di un'asimmetria del getto, con conseguente deviazione della spinta; si può avere qualche perdita (per l'insorgere di onde d'urto), ma sussiste il problema dei considerevoli carichi laterali ai quali è soggetto l'ugello quando vengono attivati i getti laterali, carichi ai quali la struttura allungata dell'ugello è poco adatta a resistere (comunque questo problema si pone anche per i tre sistemi precedentemente esaminati). Infine, si possono utilizzare, in endoreattori a propellente liquido, piccole camere di spinta laterali orientabili, senza alterare quindi il funzionamento del motore principale.

In stadi propulsivi dotati di più motori il TVC può anche essere conseguito modulando la spinta di parte dei motori (se questi sono a propellenti liquidi), vedi fig. 2.8. Se per esempio, in uno stadio a quattro motori, viene ridotta la spinta dei due motori superiori, come indicato nella figura in alto a sinistra, il razzo tenderà a ruotare intorno l'asse di beccheggio (orizzontale), aumentando l'angolo d'assetto ϑ, o al contrario riducendolo se viene invece ridotta la spinta dei due motori inferiori. Se invece viene ridotta la spinta dei due motori a sinistra, vedi figura in alto al centro, il razzo ruoterà attorno all'asse di imbardata (verticale) puntando a sinistra, o viceversa a destra se viene invece ridotta la spinta dei due motori a destra. Si vede quindi che si può avere il controllo della direzione della spinta senza deviare la direzione della spinta dei singoli motori; sono comunque necessari almeno tre motori per controllare sia beccheggio che imbardata. Se invece si volesse conseguire il controllo anche del moto attorno all'asse di rollio (longitudinale), sarà necessario ricorrere ancora ad ugelli orientabili, o accorgimenti simili come indicato in fig. 2.7. Per esempio, come indicato in alto a destra nella fig. 2.8, se i due ugelli tratteggiati vengono opportunamente inclinati, il razzo ruoterà intorno all'asse di rollio.

Gimbal or hinge	Flexible laminated bearing	Flexible nozzle joint	Jet vanes
Universal joint suspension for thrust chamber	Nozzle is held by ring of alternate layers of molded elastomer and spherically formed sheet metal	Sealed rotary ball joint	Four rotating heat resistant aerodynamic vanes in jet
L	S	S	L/S

Jetavator	Jet tabs	Side injection	Small control thrust chambers
Rotating airfoil shaped collar, gimballed near nozzle exit	Four paddles that rotate in and out of the hot gas flow	Secondary fluid injection on one side at a time	Two or more gimballed auxiliary thrust chambers
S	S	S	L

Figure 2.7: Opzioni per il *TVC*, da [8].

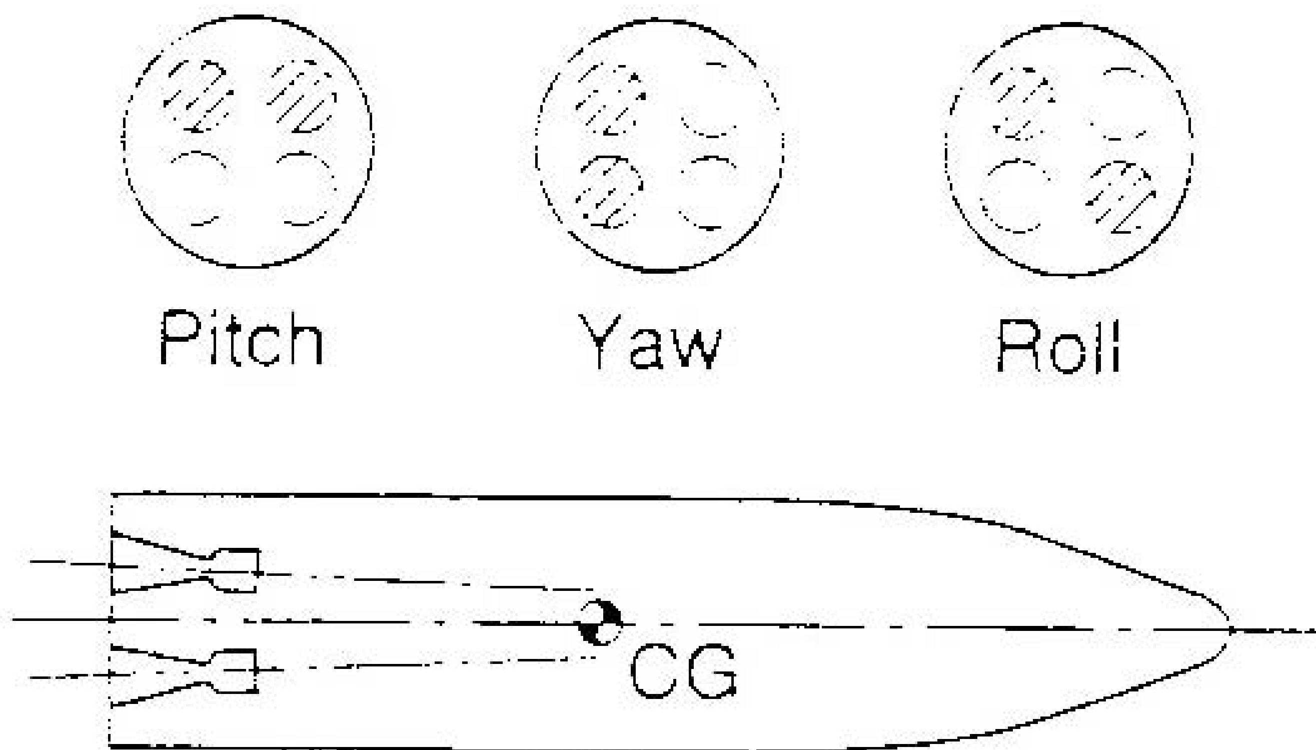


Figure 2.8: Controllo di beccheggio, imbardata e rollio in uno stadio a quattro motori, da [11].

La fig. 2.9 mostra invece gli ugelli orientabili dei motori a propellente solido GEM 46, adottati come *strap–on boosters* dal lanciatore Delta; ovviamente in questo caso, pur avendosi più motori, questi non sono regolabili, per cui occorre appunto orientare gli ugelli.

Alcuni motori a propellenti liquidi presentano un'unica camera di combustione e più ugelli, per esempio quattro nel caso dei motori RD–170 mostrati in fig. 2.10 (due ugelli invece nella versione RD–180, adottata dagli attuali lanciatori Atlas). In tal caso si potebbe pensare di controllare la direzione della spinta riducendo opportunamente il flusso di uno o più ugelli, ma questa soluzione è scartata perché potrebbe alterare il flusso nella camera di combustione ed innescare perciò il fenomeno dell'instabilità di combustione.

Dedichiamo infine un cenno agli attuatori usati per orientare l'ugello, nei sistemi ad ugello orientabile. La fig. 2.11 mostra la disposizione dei due attuatori adottati in un particolare motore (bastano ovviamente due attuatori con linee d'azione ortogonali fra loro per orientare l'ugello in tutte le direzioni). Questi attuatori possono essere di tipo idraulico, pneumatico, od elettromeccanico. La fonte di energia per l'azionamento può essere costituita, per sistemi idraulici o pneumatici, da gas freddi in



Figure 2.9: Ugelli orientabili dei *boosters* a propellente solido GEM 46 del lanciatore Delta, da [12].

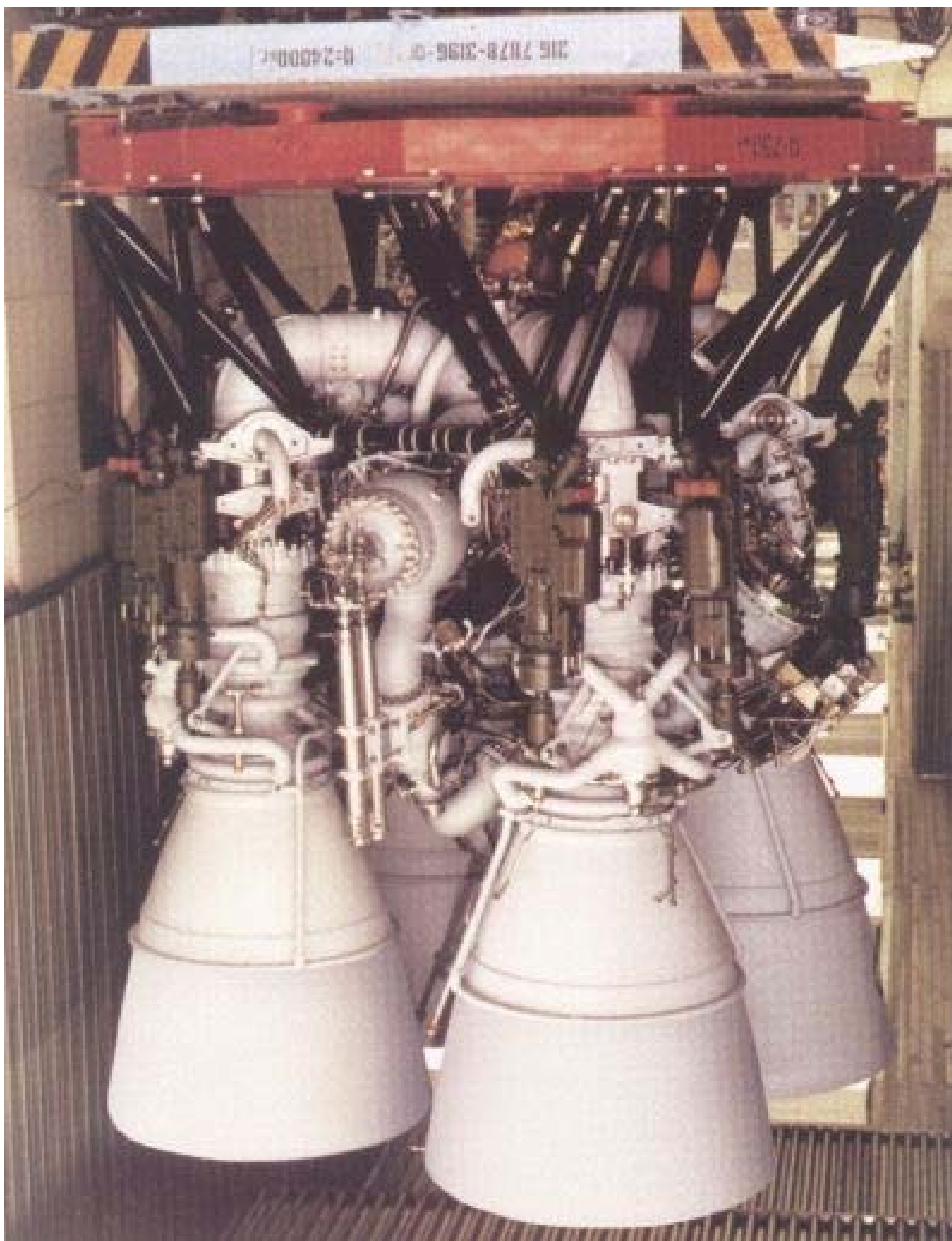


Figure 2.10: Motore RD–170, da [13].

pressione, gas caldi estratti mediante uno spillamento dal generatore di gas per le turbopompe (negli endoreattori a propellenti liquidi), o ancora da fluido in pressione; per sistemi elettromeccanici, da



Figure 2.11: Disposizione degli attuatori per il TVC, da [14].

batterie o da un turbogeneratore di potenza elettrica, azionato da gas caldi.

2.3 Stabilità del lanciatore

Affrontiamo ora l'analisi delle condizioni di stabilità del moto del lanciatore. Consideriamo dapprima il caso di angolo di *gimbal* β nullo, per cui la spinta è diretta secondo l'asse del razzo; possiamo pensarla applicata, come anche la forza peso, al centro di massa o baricentro del razzo, indicato per brevità con *cm* oppure con il simbolo $\bigoplus$. Le rimanenti forze agenti sul razzo sono la resistenza D e la portanza L, le quali sono invece applicate al centro di pressione del razzo, indicato come *cp*,

oppure con il simbolo ⊙. La posizione del centro di pressione del razzo è determinata dalla sua geometria. Nei razzi con pinne in coda, il centro di pressione è tipicamente spostato appunto verso la coda stessa, mentre nei razzi senza pinne, o con pinne posizionate in prossimità della prua del razzo, il centro di pressione è invece più spostato verso la prua stessa. Ne consegue che tipicamente nei razzi con pinne in coda il centro di pressione di trova al disotto del centro di massa, mentre viceversa nei razzi senza pinne (o con pinne posizionate in prossimità della prua) il centro di pressione si trova al disopra del centro di massa, vedi fig. 2.12 [4].

Vediamo ora come queste due differenti possibilità influenzano la stabilità del moto di ascesa del razzo, vedi fig. 2.13, nel caso in cui per qualche motivo l'angolo di assetto del razzo devii dal suo valore nominale, portando di conseguenza ad una deviazione dalla traiettoria di ascesa nominale. Per effetto di tale deviazione dell'angolo di assetto ϑ (e quindi dell'angolo di incidenza aerodinamica α) si sviluppano forze aerodinamiche che non passano più per l'asse del razzo, per cui generano una coppia sul razzo rispetto al centro di massa. Se il centro di pressione si trova sotto al centro di massa, vedi fig. 2.13 a sinistra, la coppia che si sviluppa tende a riportare il razzo verso l'angolo d'assetto, e quindi la traiettoria, nominale. Se al contrario il centro di pressione si trova al disopra del centro di massa, vedi fig. 2.13 a destra, la coppia aerodinamica che si sviluppa tende ad allontanare ancor più la direzione dell'asse del razzo da quella nominale. Nel primo caso quindi il razzo è stabile, nel secondo instabile. Questo effetto basato sulla posizione del centro di pressione viene anche detto *effetto banderuola*, per evidente analogia. La stabilità qui considerata è una stabilità *statica*, cioè considerata indipendentemente dal *come* il razzo ritorna alla posizione di equilibrio, vedi par. 2.3.2. Vediamo quindi che una configurazione del razzo stabile tende a riportarlo con la prua allineata con la direzione della velocità dell'aria relativa al razzo stesso. Ancorché questa possa sembrare una situazione desiderabile, essa è in realtà poco adottata nei lanciatori moderni. Una forte stabilià statica del razzo ha infatti anche implicazioni negative: innanzitutto i momenti che tendono a riportare il razzo con la prua al vento relativo possono indurre forti momenti flettenti sulla struttura del razzo, che esso può avere difficoltà a sopportare. In secondo luogo, la presenza di vento al momento del lancio, per un lanciatore che ha tendenza a portarsi spontaneamente con la prua al vento relativo, può portare a sensibili deviazioni dalla traiettoria nominale.

[4] Va osservato tuttavia che in tale figura, tratta da [21], mentre lo spostamento del centro di pressione al variare della posizione delle pinne è riportato correttamente, il parallelo spostamento del centro di massa è poco giustificato, in quanto semmai lo spostamento delle pinne da prua, a sinistra in figura, verso la coda, a destra, produrrebbe un qualche abbassamento del centro di massa, piuttosto che un innalzamento come indicato.

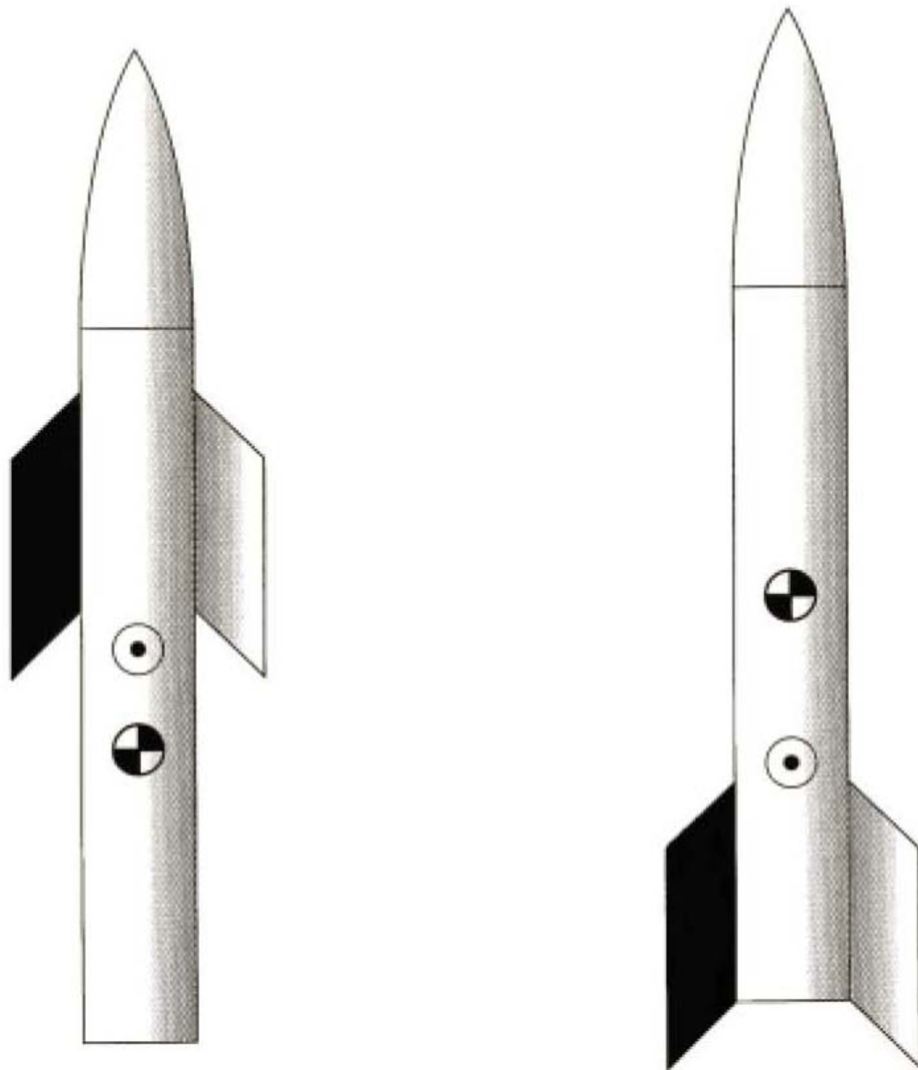


Figure 2.12: Posizione dei centri di massa e di pressione, da [15].

2.3.1 Equazioni del moto del razzo attorno al baricentro

Ricaviamo ora, pur sotto alcune ipotesi semplificative, le equazione del moto (rotazionale) del razzo attorno al baricentro, allo scopo di poter trattare la *dinamica* della stabilità. Indichiamo con ξ_e la distanza tra il centro di massa e la sezione d'uscita del motore, vedi fig. 2.14 (si noti anche in figura l'angolo di gimbal β), e con $\dot{m}$ la portata in massa di propellenti (positiva). Introduciamo le seguenti ipotesi semplificative:

1. Terra fissa (non rotante) e piatta. Questo comporta che l'angolo χ (tra velocità assoluta e

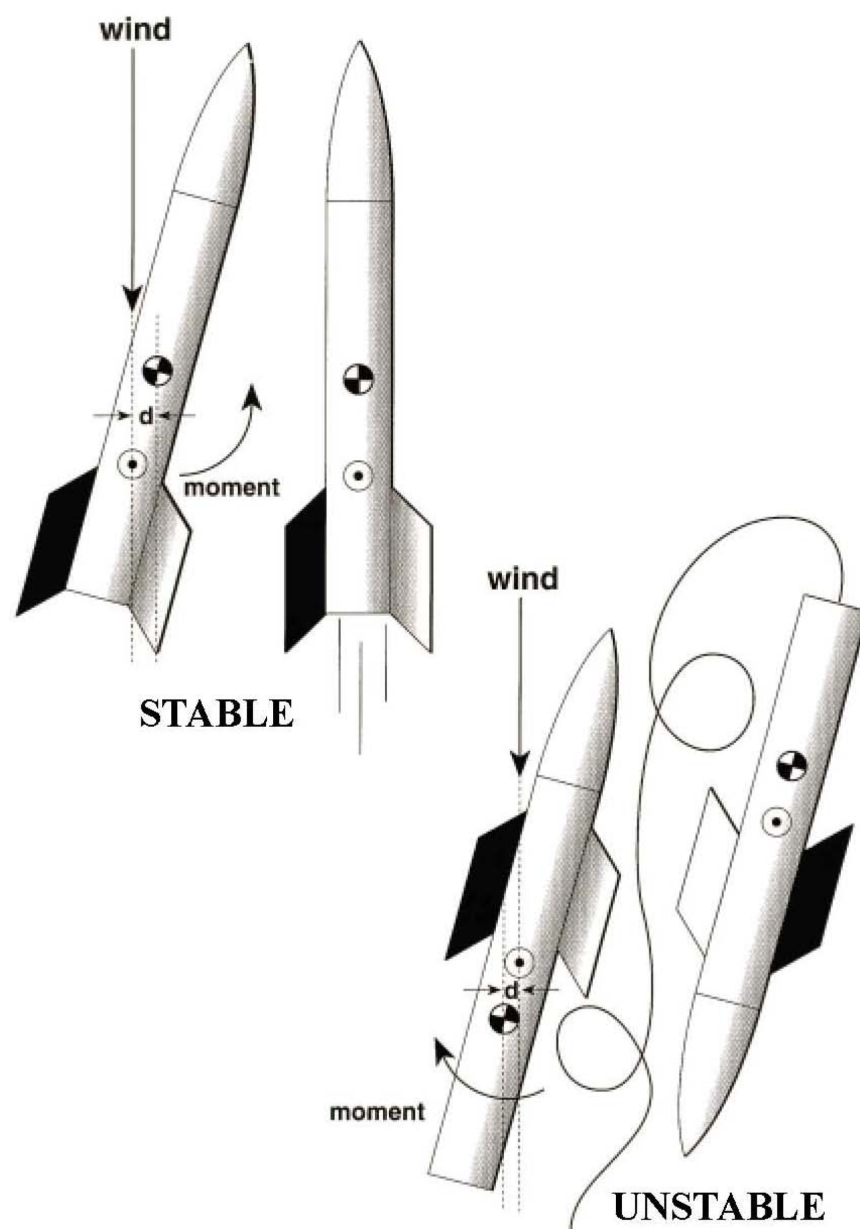


Figure 2.13: Configurazioni stabile (sinistra) ed instabile (destra), da [15].

relativa, che sotto queste ipotesi vengono a coincidere) sia nullo, per cui risulta

$$\epsilon = \alpha \tag{2.47}$$

e di conseguenza, in base alla (2.45)

$$\vartheta = \gamma + \alpha \tag{2.48}$$

2. imbardata e rollio nulli (consideriamo quindi il solo moto di beccheggio, in $\dot{\vartheta}$);

3. infine, assumiamo che l'angolo di volo γ possa essere preso costante, almeno in un intervallo di tempo significativamente più lungo rispetto ai tempi associati con la dinamica rotazionale del lanciatore

$$\gamma = \text{cost} \tag{2.49}$$

per cui derivando la (2.48) si ha

$$\dot{\vartheta} = \dot{\alpha} \tag{2.50}$$

e basterà studiare l'evoluzione nel tempo dell'angolo di incidenza α.

La rozzezza di queste ipotesi è giustificata in questo contesto in quanto stiamo solo cercando di capire quali sono i problemi più importanti ai fini del controllo e della stabilità del lanciatore (mentre per calcoli operativi si ricorrerà ovviamente ad una descrizione più dettagliata), ed inoltre perché l'energia cinetica che il lanciatore acquista nel suo moto rotazionale attorno al baricentro risulta assolutamente trascurabile rispetto a quella traslazionale, come può essere facilmente dimostrato introducento il rapporto $\mathcal{R}$ fra queste due energie:

$$\mathcal{R} = \frac{\frac{1}{2} I\, \dot{\vartheta}^2}{\frac{1}{2} m\, v^2} \tag{2.51}$$

dove abbiamo indicato con I il momento d'inerzia del lanciatore attorno al suo asse di beccheggio, al tempo t (ovviamente I, come pure m, variano con t per lo svuotarsi dei serbatoi, e per la sequenza di stadiazione; notare anche che avremmo potuto equivalentemente adottare $\dot{\alpha}$ anziché $\dot{\vartheta}$). Per una rozza stima degli ordini di grandezza, assimiliamo il lanciatore ad un cilindro allungato di lunghezza l, con massa uniformemente distribuita; il corrispondente momento d'inerzia attorno all'asse di beccheggio (asse ζ, attraverso il centro di massa) vale

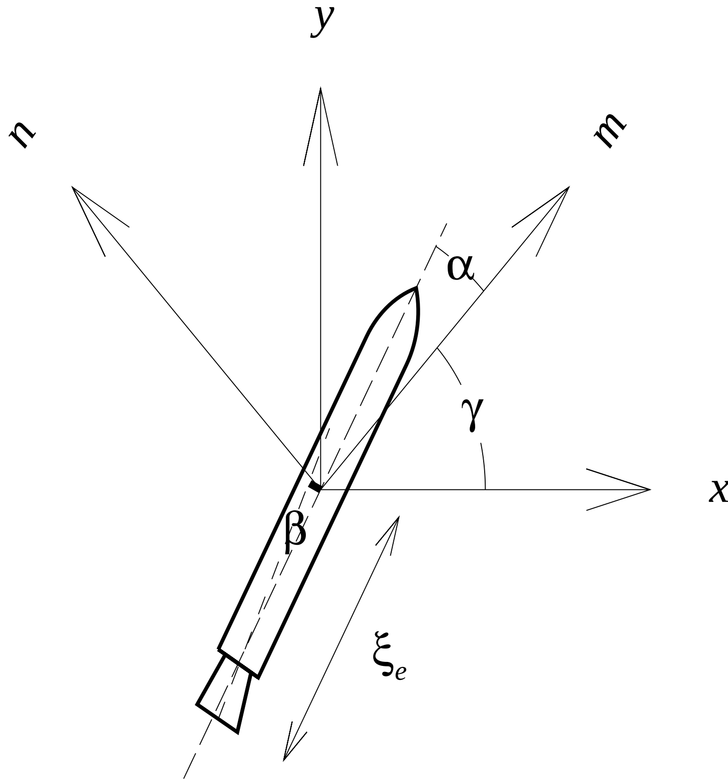


Figure 2.14: Determinazione delle coppie agenti attorno al baricentro.

$$I = \frac{m\,l^2}{12} \tag{2.52}$$

per cui il rapporto cercato (2.51) risulta esprimibile come

$$\mathcal{R} = \frac{l^2\,\dot{\vartheta}^2}{12\,v^2} \tag{2.53}$$

Assumendo valori largamente indicativi per ricavare un ordine di grandezza, prendiamo per esempio una velocità di rotazione attorno all'asse di beccheggio di un grado al secondo (che, va sottolineato,

è un valore molto alto), ossia circa 0,017 rad/s, ed una lunghezza l del lanciatore di 50 m; si arriva al risultato

$$\mathcal{R} \simeq \frac{1}{16\, v^2} \tag{2.54}$$

ed ipotizzando una velocità obiettivo di circa 8000 m/s (al *burnout* dell'ultimo stadio), si ottiene una stima conservativa

$$\mathcal{R} \simeq 10^{-9} \tag{2.55}$$

che conferma l'irrisoria rilevanza del moto attorno al baricentro *dal punto di vista energetico*. Ciò non toglie che il sistema di controllo dell'assetto del razzo ha un'importanza ovviamente centrale per assicurare che il lanciatore segue la legge di guida desiderata.

Deriviamo ora l'equazione per il moto del razzo attorno al baricentro, che scriviamo in termini di α (ma potremmo equivalentemente adottare ϑ, ovviamente). Dobbiamo scrivere che la risultante delle coppie attorno all'asse di beccheggio eguagli la derivata temporale del momento della quantità di moto. Le coppie che intervengono sono quelle dovute alla spinta F del motore, la quale per effetto dell'angolo di *gimbal* opera con un braccio $\xi_e \sin\beta$ rispetto al baricentro (si noti che se β è positivo, la coppia risulta diretta in senso orario, quindi è negativa), e quella dovuta alla risultante delle forze aerodinamiche (resistenza e portanza), che possiamo per il momento lasciare indicata come $M_{aerodin}$. La variazione del momento della quantità di moto è da attribuire sia alla variazione del termine relativo al razzo, $I\,\dot{\alpha}$, sia alla variazione del momento della massa infinitesima $\dot{m}\,dt$, espulsa nel tempuscolo dt ad una distanza ξ_e dal baricentro (per cui il suo momento d'inerzia infinitesimo è $\dot{m}\,\xi_e^2\,dt$), con una velocità angolare $\dot{\alpha}$ attorno all'asse ζ (oltre ovviamente ad una componente secondo l'asse longitudinale del razzo). Si ha quindi

$$\frac{d(I\,\dot{\alpha})}{dt} + \dot{m}\,\xi_e^2\,\dot{\alpha} = -\,\xi_e \sin\beta\, F + M_{aerodin} \tag{2.56}$$

La coppia dovuta alle forze aerodinamiche dipende dall'angolo di incidenza α, e dalla velocità angolare $\dot{\alpha}$; supponendo di effettuare un'espansione in serie attorno alla situazione di incidenza e velocità angolare nulle, e supponendo di ritenere solo i termini lineari in queste due grandezze, e di trascurare quindi quelli di ordine più elevato, si ha

$$M_{aerodin} = M_0 + M'_\alpha\,\alpha + M'_{\dot\alpha}\,\dot\alpha + \cdots \simeq M'_\alpha\,\alpha + M'_{\dot\alpha}\,\dot\alpha \qquad (2.57)$$

In questa espressione M_0 indica il momento delle forze aerodinamiche per angolo di incidenza e velocità angolare nulli, che può essere diverso da zero solo in presenza di geometrie del razzo non assialsimmetriche, situazione che abbiamo escluso nell'ultimo passaggio. Si noti che M'_α risulta positivo per configurazioni instabili, e negativo per configurazioni stabili, mentre $M'_{\dot\alpha}$ risulta tipicamente negativo (la rotazione del razzo genera un momento aerodinamico che si oppone alla rotazione, vedi fig. 2.15). Sostituendo nella (2.56), e sviluppando anche la derivata di $I\,\dot\alpha$, si ha l'equazione differenziale che descrive il moto del razzo intorno al baricentro:

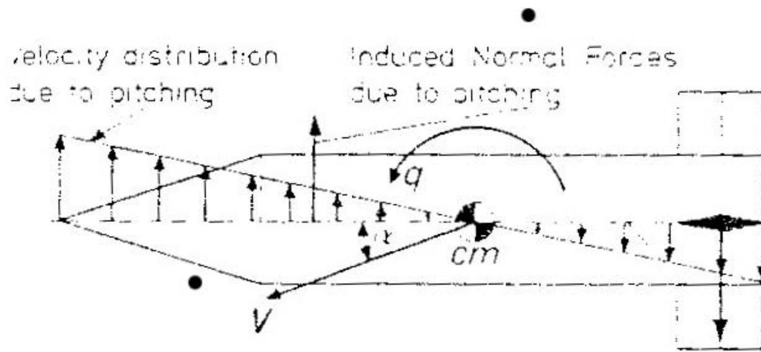


Figure 2.15: Distribuzione di velocità e conseguente momento delle forze aerodinamiche indotte da un valore di $\dot\alpha$ negativo (rotazione in senso orario), da [16].

$$I\,\ddot\alpha + \left(\dot I + \dot m\,\xi_e^2 - M'_{\dot\alpha}\right)\dot\alpha - M'_\alpha\,\alpha = -\xi_e\,\sin\beta\,F \qquad (2.58)$$

Si vede innanzitutto che questa equazione ammette come soluzione particolare

$$\alpha_0 = \frac{\xi_e\,\sin\beta\,F}{M'_\alpha} \qquad (2.59)$$

che è l'angolo di equilibrio statico (cioè nella situazione in cui tutte le derivate temporali sono nulle, analogamente a quanto è stato visto nell'esame della stabilità statica; si noti che però nel caso

presente è stato supposto un angolo di *gimbal* β non nullo). Tuttavia ovviamente il razzo reagirà ad una deviazione dall'angolo di incidenza nominale attraverso un'evoluzione temporale, per cui dobbiamo cercare la soluzione generale dell'eq. (2.58).

2.3.2 Stabilità dinamica longitudinale

Cerchiamo la soluzione della eq. (2.58) come somma della soluzione particolare (2.59) e della soluzione dell'equazione omogenea associata alla (2.58) stessa, cioè

$$I\,\ddot{\alpha} \,+\, \left(\dot{I} \,+\, \dot{m}\,\xi_e^2 \,-\, M'_{\dot{\alpha}}\right)\,\dot{\alpha} \,-\, M'_{\alpha}\,\alpha \;=\; 0 \tag{2.60}$$

Questa può essere formalmente riscritta, ponendo

$$c_1 \;=\; \dot{I} \,+\, \dot{m}\,\xi_e^2 \,-\, M'_{\dot{\alpha}} \tag{2.61}$$

$$c_0 \;=\; -\,M'_{\alpha} \tag{2.62}$$

come

$$I\,\ddot{\alpha} \,+\, c_1\,\dot{\alpha} \,+\, c_0\,\alpha \;=\; 0 \tag{2.63}$$

Questa è un'equazione differenziale lineare, ancorché a coefficienti *non* costanti; ammettiamo però che i tempi caratteristici associati con la variazione di questi coefficienti siano sensibilmente più lunghi di quelli inerenti la dinamica rotazionale del razzo, e di poter di conseguenza approssimare la soluzione della (2.63) a quella di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. La soluzione sarà quindi data dalla somma di modi esponenziali con costanti di tempo determinate dalla soluzione dell'equazione algebrica

$$I\,\lambda^2 \,+\, c_1\,\lambda \,+\, c_0 \;=\; 0 \tag{2.64}$$

le cui radici λ_1 e λ_2 sono

$$\lambda_i \;=\; \frac{-\,c_1 \,\mp\, \sqrt{c_1^2 \,-\, 4\,I\,c_0}}{2\,I} \tag{2.65}$$

La soluzione generale dell'eq. (2.58) è quindi

$$\alpha \;=\; \alpha_0 \,+\, A_1 \,\exp\left(\lambda_1 \, t\right) \,+\, A_2 \,\exp\left(\lambda_2 \, t\right) \tag{2.66}$$

Questa ammette i seguenti possibili tipi di soluzione:

1. soluzione periodica smorzata se $\Delta = c_1^2 - 4\,I\,c_0 < 0$ [per cui la radice quadrata nella (2.65) è immaginaria, il che corrisponde ad una soluzione sinusoidale del termine $\exp(\lambda_i\,t)$][5], e $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$;
2. soluzione periodica amplificata se ancora $\Delta < 0$, ma $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ (perché il termine $\exp(\mu\,t)$ è crescente);
3. soluzione aperiodica se $\Delta = c_1^2 - 4\,I\,c_0 > 0$, nel qual caso le radici di λ sono reali.

Ne segue che il razzo, per effetto di una deviazione dell'angolo di incidenza α dal valore di equilibrio α_0, nel caso 1 tende a tornare a tale valore attraverso una serie di oscillazioni smorzate, nel caso 2 invece andrà soggetto ad una serie di oscillazioni di ampiezza crescente (per cui è sostanzialmente fuori controllo), mentre nel caso 3 il moto risulta aperiodico. Il carattere della soluzione è quindi determinato dai valori dei coefficienti I, c_1 (2.61), c_0 (2.62); si noti che I è sempre positivo, c_0 per quanto detto sopra, vedi commento alla (2.57) è negativo per configurazioni instabili, e positivo per configurazioni stabili, mentre dei termini che compaiono in c_1, $\dot{I}$ è negativo (il momento d'inerzia del razzo si riduce nel tempo man mano che i serbatoi si svuotano), $\dot{m}\,\xi_e^2$ è positivo, come pure $-\,M'_{\dot{\alpha}}$, vedi fig. 2.15.

2.3.3 Esempio: stabilità dinamica longitudinale di un razzo a propellente solido

Consideriamo un ipotetico razzo monostadio, la cui posizione del centro di massa resti fissa nel tempo. Questa situazione può essere avvicinata se il propulsore è a propellente solido con grano a combustione interna, per cui il grano di propellente bruciando recede in direzione radiale. La massa della cassa del motore, che funge da serbatoio, possiamo considerarla distribuita uniformemente lungo la lunghezza l del razzo, mentre la massa della sezione di testa del serbatoio la consideriamo accorpata con quella del carico utile m_u, e quella della sezione di coda del serbatoio la consideriamo accorpata con la massa m_e del motore (in questo caso l'ugello ed organi per il TVC). Supponiamo

[5]Si ricordi che per l'espressione di Eulero è $\exp[(\mu\,+\,i\,\nu)\,t] = \exp\mu\,t\cdot(\cos\nu\,t\,+\,i\,\sin\nu\,t)$, avendo indicato con μ e ν la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di λ.

che le masse del carico utile e del motore possano essere considerate, ai fini della determinazione del momento d'inerzia del razzo, come puntiformi, ed in più supponiamo che $m_u = m_e$, per cui il centro di massa si troverà costantemente a metà della lunghezza l del razzo; ancora, ammettiamo che il momento d'inerzia del grano di propellente e del serbatoio possano essere calcolati assimilando queste strutture a travi allungate. Avendo scisso la massa strutturale in massa del serbatoio m_t e massa del motore m_e, quantifichiamo la prima introducendo il coefficiente di proporzionalità κ_t tra m_t e massa di propellente m_p, vedi (1.44). Chiamando m_0 la massa iniziale del razzo, essa sarà perciò

$$m_0 = m_p + m_t + m_e + m_u \tag{2.67}$$

dove

$$m_p = m_0 \, (1 - \mathcal{M\!R}) = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{c} \right) \right] \tag{2.68}$$

$$m_t = \kappa_t \, m_p \tag{2.69}$$

$$m_e = \frac{F}{g_0 \, (F/W)} = \frac{a_0 \, m_0}{g_0 \, (F/W)} = \frac{f_{a0} \, m_0}{(F/W)} \tag{2.70}$$

Fissata la massa iniziale m_0 del razzo, dalla (2.67) si può dunque esplicitare la massa del carico utile; tutte le componenti della massa sono quindi note. Supponiamo per esempio che sia $\mathcal{M\!R} = 0{,}2$ (il che corrisponde ad un incremento di velocità ridotto $\Delta v/c \simeq 1{,}61$) per cui $m_p = 0{,}80 \; m_0$, poi $\kappa_t = 0{,}15$ per cui $m_t = \kappa_t \, m_p = 0{,}12 \; m_0$, ed ancora $f_{a0} = 2$ e $(F/W) = 50$ per cui $m_e = 0{,}04 \; m_0$; ne segue che la massa del carico utile risulta $m_u = 0{,}04 \; m_0$ dalla (2.67). Il razzo risulta quindi composto dalle masse del propellente e del serbatoio, uniformemente distribuite lungo l'asse del razzo, e delle masse (concentrate) del motore e del carico utile, che risultano, con i valori sopra ipotizzati, essere uguali fra loro; ne segue che il centro di massa del razzo si troverà costantemente nel centro geometrico del razzo, posto a distanza $\mathsf{l}/2$ da ciascuna estremità. Il momento d'inerzia del razzo sarà perciò la somma di quelli relativi alle masse distribuite, assimilabili a cilindri allungati (quindi con momento d'inerzia rispetto ad un asse ortogonale al centro di massa esprimibile come $m \, \mathsf{l}^2/12$), e di quelli relativi alle masse concentrate, a distanza $\mathsf{l}/2$ dal centro di massa (con momento d'inerzia quindi $m \, (\mathsf{l}/2)^2$ rispetto al centro di massa). L'unica massa che varia nel tempo è quella di propellente:

$$m_p(t) = m_{p0} - \dot{m}\, t \tag{2.71}$$

Il momento d'inerzia del razzo rispetto ad un asse ortogonale all'asse longitudinale, passante per il centro di massa, risulta quindi

$$I(t) = m_p(t)\frac{\mathsf{l}^2}{12}+m_t\frac{\mathsf{l}^2}{12}+m_e\frac{\mathsf{l}^2}{4}+m_u\frac{\mathsf{l}^2}{4} = (m_{p0}-\dot{m}\,t)\frac{\mathsf{l}^2}{12}+m_t\frac{\mathsf{l}^2}{12}+m_e\frac{\mathsf{l}^2}{4}+m_u\frac{\mathsf{l}^2}{4} = I_0-\frac{\dot{m}\,\mathsf{l}^2}{12}\,t \tag{2.72}$$

essendo I_0 il momento d'inerzia del razzo all'istante dell'accensione. La (2.72) dà quindi il coefficiente del termine di secondo grado della (2.64). La sua derivata rispetto al tempo risulta

$$\dot{I} = -\frac{\dot{m}\,\mathsf{l}^2}{12} \tag{2.73}$$

La distanza tra centro di massa ed uscita del motore risulta come detto $\mathsf{l}/2$, per cui il coefficiente di primo grado della (2.64) risulta

$$c_1 = \dot{I} + \dot{m}\,\frac{\mathsf{l}^2}{4} - M'_{\dot{\alpha}} \tag{2.74}$$

Per esprimere $M'_{\dot{\alpha}}$, consideriamo il momento indotto dalle forze aerodinamiche, per effetto del moto di rotazione attorno all'asse citato per il centro di massa con velocità $\dot{\alpha}$, su un concio infinitesimo del razzo compreso tra due sezioni a distanza ξ e $\xi + d\xi$ dal centro di massa, vedi fig. 2.15:

$$dM_{aerodin,\dot{\alpha}} = -\left(c_{D,cyl}\,\frac{\rho\,\dot{\alpha}\;|\dot{\alpha}|\;\xi^2}{2}\,\mathsf{d}\,d\xi \right)\,\xi \tag{2.75}$$

dove il termine tra parentesi tonde è la velocità lineare ad una distanza ξ dal centro di massa, e quello tra parentesi quadre la forza aerodinamica sul concio infinitesimo, che moltiplicata per il braccio ξ dà il momento; il coefficiente di resistenza appropriato è quello di un cilindro, in quanto tale è il profilo

della sezione laterale del razzo (di diametro d). Si noti che tale momento agisce in direzione opposta al verso di rotazione, da cui il segno meno (la velocità di rotazione al quadrato è stata scritta come $\dot{\alpha}\ |\dot{\alpha}|$ appunto per ritenere la dipendenza dal segno di $\dot{\alpha}$). Il momento complessivo che si esercita su metà razzo si ottiene integrando per ξ da zero a $\mathsf{l}/2$, e quello sull'intero razzo raddoppiando tale valore:

$$M_{aerodin,\dot{\alpha}} \;=\; 2\int_0^{\mathsf{l}/2} dM_{aerodin,\dot{\alpha}} \;=\; -\,c_{D,cyl}\,\rho\,\dot{\alpha}\ |\dot{\alpha}|\ \mathsf{d}\int_0^{\mathsf{l}/2}\xi^3\,\mathsf{d}\,\xi \;=$$

$$=\; -\,c_{D,cyl}\,\rho\,\dot{\alpha}\ |\dot{\alpha}|\ \mathsf{d}\left[\frac{\xi^4}{4}\right]_0^{\mathsf{l}/2} \;=\; -\,\frac{c_{D,cyl}}{64}\,\rho\,\dot{\alpha}\ |\dot{\alpha}|\ \mathsf{d}\,\mathsf{l}^4 \qquad (2.76)$$

da cui, facendo riferimento alla (2.57)

$$M'_{\dot{\alpha}} \;=\; \frac{\partial M_{aerodin}}{\partial\dot{\alpha}} \;=\; -\,\frac{c_{D,cyl}}{32}\,\rho\,\dot{\alpha}\,\mathsf{d}\,\mathsf{l}^4 \qquad (2.77)$$

Per determinare invece il coefficiente di grado zero della (2.64) occorre valutare il momento delle forze aerodinamiche di portanza rispetto all'asse citato per il centro di massa (quelle di resistenza hanno momento nullo, in quanto allineate con l'asse longitudinale del razzo):

$$M_{aerodin,\alpha} \;=\; c_L\,\frac{\rho\,v^2}{2}\,\frac{\pi\,\mathsf{d}^2}{4}\,\xi_{cp} \qquad (2.78)$$

essendo ξ_{cp} la distanza (algebrica) tra il centro di pressione ed il centro di massa; in questa formula c_L è evidentemente il coefficiente di portanza del razzo, il quale dipende dall'angolo di incidenza α (con relazione tipicamente lineare, almeno finché non si raggiungono le condizioni di stallo). Ne segue, ancora con riferimento alla (2.57)

$$M'_{\alpha} \;=\; \frac{\partial M_{aerodin}}{\partial\alpha} \;=\; \frac{\partial c_L}{\partial\alpha}\,\frac{\rho\,v^2}{2}\,\frac{\pi\,\mathsf{d}^2}{4}\,\xi_{cp} \qquad (2.79)$$

Per identificare quindi tutti i coefficienti della (2.64) rimangono da specificare diametro e lunghezza del razzo. Indicando con V il volume del razzo, ed indicando con A_{web}/A la sua densità di carico (rapporto tra area occupata dal propellente in una generica sezione – prima dell'accensione, ed area della sezione stessa), ed ancora con ρ_p la densità del grano, si ha

$$V = \frac{1}{A_{web}/A} \frac{m_0}{\rho_p} = \frac{\pi \, \mathsf{d}^2}{4} \mathsf{l} = \frac{\pi \, \mathsf{d}^3}{4} \left(\frac{\mathsf{l}}{\mathsf{d}} \right) \tag{2.80}$$

dove è stato introdotto il rapporto lunghezza/diametro l/d; assegnato tale rapporto (sulla base di un compromesso tra l'esigenza di contenere la resistenza aerodinamica – che suggerirebbe un valore alto, e quella di un'accettabile resistenza strutturale – che porterebbe ad un valore basso), il diametro e la lunghezza del razzo si trovano come

$$\mathsf{d} = \left[\frac{4\,V}{\pi\,(\mathsf{l}/\mathsf{d})} \right]^{1/3} = \left[\frac{4\,m_p}{\pi\,(A_{web}/A)\,(\mathsf{l}/\mathsf{d})\,\rho_p} \right]^{1/3}, \qquad \mathsf{l} = \mathsf{d} \cdot \left(\frac{\mathsf{l}}{\mathsf{d}} \right) \tag{2.81}$$

Ricerchiamo ora la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (2.58) per l'esempio in questione, ipotizzando i seguenti valori:

$$m_0 = 100\,000 \text{ kg}, \qquad c = 2250 \text{ m/s}, \qquad \rho_p = 1800 \text{ kg/m}^3$$

$$f_{a0} = 2, \qquad \frac{\mathsf{l}}{\mathsf{d}} = 6, \qquad A_{web}/A = 0,8 \tag{2.82}$$

nell'istante

$$t = 12 \text{ s} \tag{2.83}$$

in corrispondenza al quale supponiamo le condizioni di volo (numero di Mach e quota) essere

$$M = 1, \qquad h = 1000 \text{ m} \tag{2.84}$$

Per il coefficiente di resistenza del cilindro si può assumere

$$c_{D,cyl} \; = \; 1,17 \tag{2.85}$$

mentre per la derivate del coefficiente di portanza rispetto all'angolo d'incidenza, per il valore del numero di Mach considerato in (2.84), assumiamo

$$\frac{\partial c_L}{\partial \alpha} \; = \; 10 \;\; \mathrm{rad}^{-1} \tag{2.86}$$

Supponiamo ancora che nell'istante considerato la rotazione attorno al centro di massa sia caratterizzata dai seguenti valori

$$\alpha \; = \; 1^{\mathrm{o}}, \qquad\qquad \dot{\alpha} \; = \; 0 \tag{2.87}$$

Cominciamo a considerare il caso in cui il centro di pressione si trovi al disotto del centro di massa (razzo staticamente stabile), per esempio

$$\xi_{cp} \; = \; -\,0,1 \;\cdot\; \mathsf{l} \tag{2.88}$$

Si può verificare che i coefficienti dei termini di grado secondo, primo e zero valgono rispettivamente

$$c_2 \; = \; 1,903 \cdot 10^6 \;\; \mathrm{s}^2/\mathrm{rad}, \qquad c_1 \; = \; 31,438 \cdot 10^3 \;\; \mathrm{s}/\mathrm{rad}, \qquad c_0 \; = \; 4,262 \cdot 10^6 \;\; \mathrm{rad}^{-1} \tag{2.89}$$

e che il discriminante è di conseguenza negativo

$$\Delta \; = \; -\,32,447 \cdot 10^{12} \;\; \mathrm{s}^2/\mathrm{rad}^2 \tag{2.90}$$

Le soluzioni della (2.64) risultano pertanto

$$\lambda_{1,2} \; = \; (-0,008259 \; \mp \; i\,1,496544) \;\; \mathrm{s}^{-1} \tag{2.91}$$

La soluzione generale dell'eq. (2.58) risulta quindi essere un moto oscillatorio con periodo

$$T_{osc} \; = \; \frac{2\,\pi}{1,496544} \; = \; 4,198 \;\; \mathrm{s} \tag{2.92}$$

smorzato con costante di tempo

$$T_{smorz} \;=\; \frac{1}{0,008259} \;=\; 121,073 \;\;\text{s} \tag{2.93}$$

Si osservi che il periodo associato al moto oscillatorio è molto più breve del tempo caratteristico associato con il consumo del grano di propellente, il cui ordine di grandezza è dato dal tempo di combustione

$$t_b \;=\; \frac{m_p}{\dot{m}} \;=\; \frac{m_0\,(1\;-\;MR)}{F/c} \;=\; \frac{m_0\,(1\;-\;MR)}{f_{a0}\,g_0\,m_0/c} \;=\; 91,774 \;\;\text{s} \tag{2.94}$$

il che giustifica in qualche misura l'aver ricercato la soluzione della (2.63) approssimandola ad un'equazione a coefficienti costanti; anche l'aver considerato γ costante risulta giustificato in questo contesto, poiché le variazioni dell'angolo di volo in un intervallo di tempo dell'ordine indicato dalla (2.92) non saranno significative. D'altro lato, si può osservare come il periodo associato allo smorzamento sia solo di poco superiore al tempo t_b, il che indica invece una scarsa attendibilità della soluzione ottenuta, almeno sotto questo punto di vista.

Consideriamo adesso l'altro caso, in cui il centro di pressione si trova al disopra del centro di massa (razzo staticamente instabile), per esempio

$$\xi_{cp} \;=\; +\,0,1\;\cdot\;\mathsf{l} \tag{2.95}$$

L'unico coefficiente della (2.64) che risulta alterato rispetto al caso precedente è quello relativo al termine di grado zero, che si determina come

$$c_0 \;=\; -\,4,262\cdot 10^6 \;\;\text{rad}^{-1} \tag{2.96}$$

rendendo il discriminante positivo

$$\Delta \;=\; 32,449\cdot 10^{12} \;\;\text{s}^2/\text{rad}^2 \tag{2.97}$$

Le soluzioni della (2.64) risultano pertanto in questo caso

$$\lambda_1 \ = \ -1,505 \ \ s^{-1}, \qquad\qquad \lambda_2 \ = \ 1,488 \ \ s^{-1} \tag{2.98}$$

La prima radice corrisponde ad un moto aperiodico smorzato, ma la seconda ad un moto aperiodico amplificato, con la conseguenza che il lanciatore, in assenza di azioni di controllo, devia irrimediabilmente dalla traiettoria prestabilita. Abbiamo osservato che la situazione in cui il centro di pressione risulta al disopra del centro di massa è tipica dei lanciatori moderni, privi di pinne; essi dovranno pertanto essere dotati di un opportuno sistema di controllo che consenta di compensare l'instabilità intrinseca del razzo, agendo opportunamente sugli attuatori (meccanismi di *gimbal* o equivalenti).

È superfluo osservare che la dinamica del lanciatore risulta evidentemente più complessa quando il centro di massa, contrariamente a quanto assunto per semplicità in questo esempio, si sposta nel tempo.

2.3.4 Dinamica non lineare

Fin qui abbiamo supposto che la dinamica del razzo possa essere descritta limitandosi a considerare effetti lineari in α e $\dot{\alpha}$, approssimazione che può risultare accettabile per valori piccoli (in modulo) di queste due grandezze, ma per valori più elevati occorrerà almeno includere i termini del second'ordine e sostituire la (2.57) con la

$$M_{aerodin} \ = \ M_0 \ + \ M'_{\alpha}\, \alpha \ + \ M'_{\dot{\alpha}}\, \dot{\alpha} \ + \ M''_{\alpha\alpha}\, \alpha^2 \ + \ M''_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\, \dot{\alpha}^2 \ + \ M''_{\alpha\dot{\alpha}}\, \alpha\, \dot{\alpha} \ + \ \cdots \tag{2.99}$$

il che porta evidentemente ad un'equazione differenziale del moto attorno al baricentro *non* lineare. Inoltre, occorre tener conto che sotto l'effetto di momenti attorno al baricentro la struttura del razzo non si mantiene più rigida ma tende a flettersi, per quanto lievemente, a causa della sua elasticità strutturale. Numerosi altri effetti concorrono poi ad introdurre ulteriori nonlinearità, si pensi al caso di valori elevati di α (che può richiedere di tenere conto di termini di ordine ancora più alto), effetti di risonanza/accoppiamento tra modi oscillatori secondo i tre assi del razzo, effetti di instabilità Magnus per razzi sottoposti a *spin*, cioè ad un moto di rotazione attorno l'asse longitudinale, per assicurarne la stabilità, la quale porta ad un moto di imbardata, etc.

2.3.5 Posizione del centro di massa

Abbiamo visto che la stabilità di un razzo dipende, tra l'altro, dalla posizione del centro di massa rispetto al centro di pressione. Abbiamo già visto quali fattori influiscono sulla posizione del centro di pressione (la posizione di eventuali pinne, in particolare), vogliamo ora vedere cosa si può fare per

controllare la posizione del centro di massa. Negli endoreattori a propellenti liquidi si può agire sulla disposizione dei serbatoi di combustibile (F, *fuel*) ed ossidante (O, *oxidizer*). Si noti che in generale l'ossidante ha densità maggiore di quella del combustibile, come si può osservare dalla seguente tabella, che riporta, per varie combinazioni di propellenti, le densità di ossidante e combustibile, nonché i valori tipici del rapporto O/F tra portata in massa di ossidante e combustibile.

O/F	ρ_o	ρ_f	O/F (tipico)
LOX/LH	1140	71	5 – 6
LOX/LHC	1140	810	2,2 – 2,6
NTO/UDMH	1450	790	1,5 – 2,2
NTO/MMH	1450	880	1,5 – 2,6

LOX indica ossigeno liquido, LH idrogeno liquido, LHC un idrocarburo liquido (*Liquid HydroCarbon*, tipicamente cherosene, o lo RP–1 usato negli USA), NTO il tetrossido d'azoto, UDMH la dimetil–idrazina asimmetrica (*Unsymmetric Di–Methyl Hydrazine*), MMH la monometil–idrazina (*Mono–Methyl Hydrazine*).

Dai dati riportati in tabella si evince che posizionare il serbatoio di ossidante sopra il serbatoio di combustibile porta ad innalzare il suo centro di massa; viceversa posizionare il serbatoio di combustibile sopra quello di ossidante porta ad abbassarlo. Si tenga comunque presente che la scelta del posizionamento dei serbatoi dei due propellenti è dettata anche da altre esigenze, in particolare quella di evitare la cavitazione nelle pompe di alimentazione, all'avviamento del motore. Com'è noto, il fluido all'ingresso di una pompa subisce inizialmente un lieve abbassamento di pressione (per effetto dell'aumento di velocità nel passaggio dal serbatoio alla pompa, come si può constatare dall'equazione di Bernouilli), la quale può scendere al disotto della pressione di vapore del propellente corrispondente alla temperatura alla quale questo è stivato nei serbatoi, determinando in tal modo la formazione di bolle che successivamente implodono quando, trasportate attraverso la pompa, esse raggiungono zone di pressione più elevata; queste implosioni danneggiano gravemente la pompa (ma questo è un problema marginale per le pompe di alimentazione dei propellenti di un motore a razzo, le quali devono funzionare solo per pochi minuti, fatta eccezione per il caso di motori riutilizzabili come gli SSME), e soprattutto determinando oscillazioni della pressione in camera di combustione, innescando perciò instabilità di combustione. Le pompe, per operare in assenza di cavitazione, richiedono una pressione all'ingresso convenientemente maggiore della pressione di vapore saturo, cioè un margine detto *Net Positive Suction Pressure*, o $NPSP_R$ (l'indice R sta per *Required*, richiesto), se espresso in termini di pressione, oppure *Net Positive Suction Head*, o $NPSH_R$, se espresso in termini di *battente* (com'è pratica comune in idraulica e meccanica), cioè $p/(\rho\, g)$, essendo ρ la densità del propellente e

g l'accelerazione di gravità (al livello del suolo). Lo $NPSH_A$, cioè lo $NPSH$ disponibile (*Available*) all'ingresso della pompa è invece dato da

$$(NPSH)_A \; = \; \frac{p_{tank}}{\rho\, g} \, + \, h \, - \, \frac{\Delta p_{fric}}{\rho\, g} \, - \, \frac{p_{vap}(T)}{\rho\, g} \tag{2.100}$$

dove p_{tank} è la pressione del propellente nel serbatoio, h è l'elevazione del pelo libero del serbatoio rispetto all'ingresso della pompa, Δp_{fric} indica le perdite di pressione per attrito nei condotti che vanno dal serbatoio all'ingresso della pompa, e $p_{vap}(T)$ appunto la pressione di vapore del propellente alla sua temperatura T. Esso dovrà essere quindi superiore od almeno uguale a quello richiesto:

$$(NPSH)_A \; \geq \; (NPSH)_R \tag{2.101}$$

Per assicurare che questa condizione sia soddisfatta, si può o pressurizzare adeguatemente i serbatoi (ma questo richiede pareti più spesse, quindi porta ad un aumento delle masse strutturali, nonché una certa massa di gas pressurizzante per mantenere costante la pressione nei serbatoi di propellente man mano che essi si svuotano), agendo quindi sul primo termine a secondo membro della (2.100), oppure si possono installare pompe cosidette *booster* a monte delle pompe principali, che forniscano quindi ad esse la pressione d'ingresso sufficiente, richiedendo esse stesse un bassissimo $NPSH_R$, grazie alle basse velocità del fluido per le quali sono appositamente progettate. All'avviamento dei motori tuttavia tali pompe *booster* sono ovviamente ferme, per cui il problema della cavitazione si ripropone. Si può allora tentare di far affidamento, per l'avviamento delle pompe, al battente idrostatico dovuto all'elevazione h del pelo libero del serbatoio, secondo termine a secondo membro della (2.100), ricorrendo quindi a quello che si chiama un *head start*. La scelta del posizionamento dei serbatoi del combustibile ed ossidante deve perciò anche tenere conto di eventuali esigenza di *head start* delle pompe, per assicurare le adeguate altezze del pelo libero dei due serbatoi rispetto alle pompe.

È poi appena il caso di osservare che il centro di massa di ciascuno stadio si sposta nel tempo man mano che i propellenti nei serbatoi vengono consumati.

Sottoraffreddamento dei propellenti

Parlando di densità dei propellenti, vogliamo marginalmente accennare ad uno stratagemma per aumentare la densità dei propellenti criogenici, che consiste nel raffreddarli al disotto della temperatura

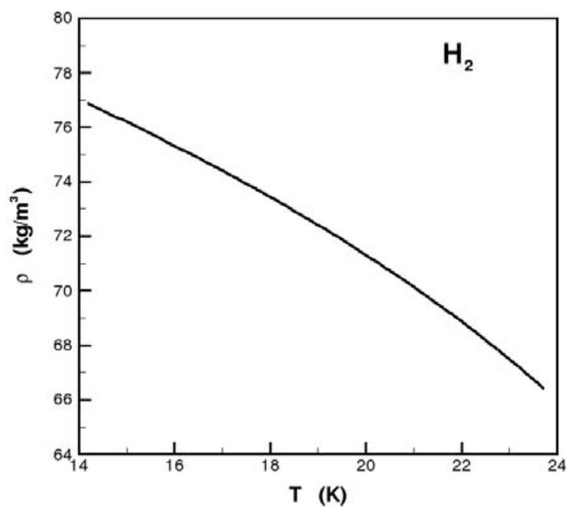
di ebollizione corrispondente alla pressione che regna nei serbatoi. Questo consente di aumentarne la densità, riducendo il volume dei serbatoi, quindi anche la loro massa (abbassando pertanto i coefficienti strutturali κ_s o κ_t), nonché la resistenza aerodinamica D (perché diminuisce la sezione frontale del lanciatore); diminuiscono anche le perdite per *boil–off* (cioè la quantità di propellente criogenico che evapora prima di poter essere utilizzata; i serbatoi devono infatti avere una valvola di sfogo perché altrimenti l'evaporazione di grosse quantità di propellente porterebbe ad un innalzamento progressivo della pressione nei serbatoi stessi, con conseguente rischio di cedimento strutturale): in definitiva, migliora il rapporto di carico utile. La fig. 2.16 mostra la densità di tre propellenti criogenici (LH, LOX e metano liquido LCH4, propellente quest'ultimo considerato perché offrirebbe prestazioni lievemente superiori ai LHC per effetto del suo più alto rapporto tra numero di atomi di idrogeno e carbonio, e perché potrebbe consentire la riutilizzabilità dei motori[6], anche se presenta lo svantaggio di una densità minore) in funzione della temperatura; si noti che la temperatura è limitata inferiormente dalla temperatura di congelamento del propellente, e superiormente dalla sua temperatura di ebollizione, la quale dipende dalla pressione (si sono qui assunti valori di 0,36 MPa per LOx, 0,25 MPa per LH, e 0,3 MPa per LCH4). Si può per esempio notare che ridurre la temperatura di LH da 20 K a 15 K aumenta la densità da 71 kg/m^3 a 76 kg/m^3, un incremento significativo ai fini del contenimento delle masse strutturali. Si osservi comunque che il sottoraffreddamento comporta anche un sensibile incremento della viscosità del propellente, per cui l'impianto di alimentazione ed iniezione dei propellenti deve essere adeguatamente progettato.

2.4 Punto di caduta degli stadi esauriti

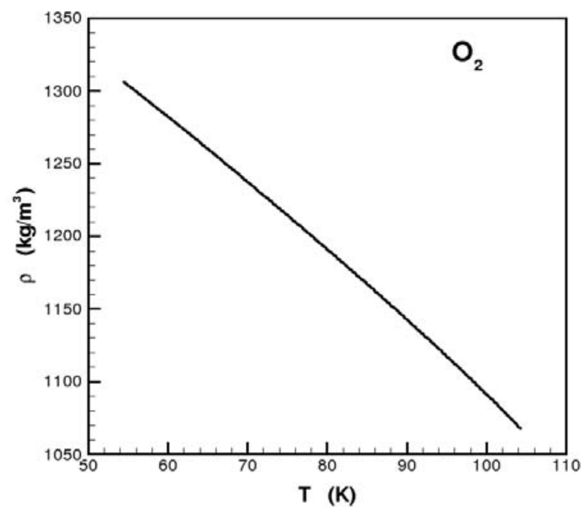
Per determinare il punto di caduta degli stadi esauriti occorre ancora risolvere le equazioni del moto del tipo (2.31); in questo caso però la spinta F è identicamente nulla, mentre la resistenza D e la portanza L possono essere importanti a causa degli elevati angoli di incidenza che gli stadi esauriti possono assumere dopo il distacco (talvolta appositamente innescati, per esempio per favorire la separazione degli stadi). L'impatto al suolo, sotto l'ipotesi di Terra sferica, si ha quando $r = R_T$.

Per localizzare il punto di caduta sulla superficie terrestre occorre ovviamente tener conto della rotazione terrestre, e determinare, sulla base dei valori di θ all'impatto, data l'inclinazione dell'orbita e la direzione di riferimento per la misura dell'angolo θ in un sistema polare, la posizione del punto di impatto.

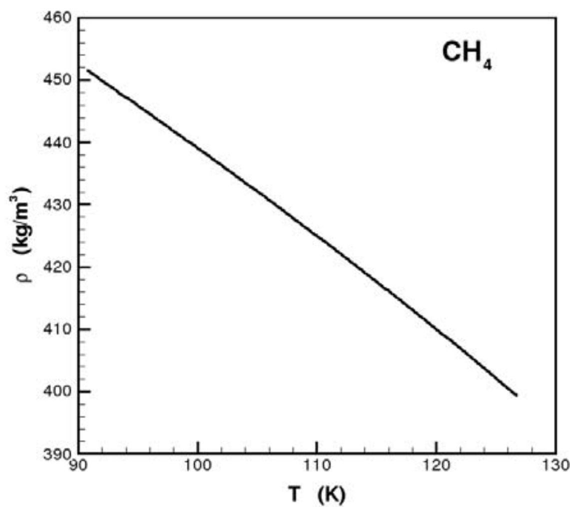
[6] Nei motori che adottano come combustibile il cherosene, utilizzato anche per raffreddare camera di combustione ed ugello, si ha formazione di depositi appiccicosi nei canali di raffreddamento, che ne rendono problematica la riutilizzazione.



(a) LH.



(b) LOX.



(c) LCH4.

Figure 2.16: Effetto del sottoraffreddamento sulla densità di alcuni propellenti criogenici.

2.5 Risoluzione delle equazioni del moto

Consideriamo ora le difficoltà associate con l'integrazione del sistema delle equazioni del moto, che abbiamo visto nella forma (2.15) per il moto traslazionale, e (2.58) per il moto attorno al baricentro

(sia pure esaminato questo sotto drastiche ipotesi semplificative). Esplicitando rispetto alle variabili di interesse si arriva ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{v} \;=\; \dfrac{F}{m}\cos(\epsilon+\beta) \;-\; \dfrac{D}{m}\cos\epsilon \;-\; \dfrac{L}{m}\sin\epsilon \;-g\;\sin\gamma \\ \dot{\gamma} \;=\; \dfrac{F}{m\,v}\sin(\epsilon+\beta) \;-\; \dfrac{D}{m\,v}\sin\epsilon \;+\; \dfrac{L}{m\,v}\cos\epsilon \;-\; \dfrac{g}{v}\cos\gamma \;+\; \dfrac{v}{r}\cos\gamma \\ \dot{r} = \; v\;\sin\gamma \\ \ddot{\alpha} = \; \cdots \\ \dot{\theta} = \; \dfrac{v}{r}\cos\gamma \end{cases} \tag{2.102}$$

Si noti che oltre alle equazioni per le derivate di v e γ, occorre integrare equazioni per ottenere r (necessaria per esprimere vari termini a secondo membro, come vedremo meglio sotto), poi α (in quanto $\epsilon = \chi + \alpha$, vedi fig. 2.3; anche D ed L dipendono da α), ed infine l'angolo polare θ (il quale non è strettamente necessario per la risoluzione delle equazioni, ma è comunque di interesse in quanto consente di identificare quali regioni della Terra sono sorvolate durante la fase di ascesa, poi dove cadono gli stadi esauriti, quali stazioni di terra possono effettuare il *tracking* del lanciatore, ...). Non è stato riportato esplicitamente il secondo membro dell'equazione per $\ddot{\alpha}$ in quanto come detto l'equazione (2.58) è stata ricavata sotto ipotesi semplificative; un'espressione dettagliata può comunque essere derivata.

A secondo membro della (2.102) compaiono grandezze la cui espressione, o almeno la dipendenza funzionale, è di seguito riportata:

$$
\begin{aligned}
F &= F(p_a, t) \;=\; F(h, t) \;=\; F(r, t) \\
D &= D[\alpha, (\beta'), r, v_r, A(t), t] \\
L &= L[\alpha, (\beta'), r, v_r, A(t), t] \\
g &= \frac{\mu}{r^2} \\
m &= m_0 - \int_0^t \dot{m}(t')\, dt' - \sum m_{si} \begin{pmatrix} \textit{stadi} \\ \textit{distaccati} \end{pmatrix} \\
I &= I_0 - \cdots \\
\xi_e &= \cdots \\
\xi_{cp} &= \cdots \\
\epsilon &= \chi + \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v \sin\gamma}{v \cos\gamma - \omega_T r} \right) - \gamma + \alpha
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

La spinta F dipende dalla pressione ambiente p_a, la quale a sua volta dipende dalla quota h, ossia dal raggio r dal centro della Terra; inoltre, la spinta varierà nel tempo per effetto della sequenza di stadiazione. La resistenza D e la portanza L dipendono dalla incidenza areodinamica α, dalla densità e quindi dalla quota, esprimibile in funzione del raggio r, dalla sezione frontale A del lanciatore (che può variare nel tempo per effetto della sequenza di stadiazione); anche i coefficienti aerodinamici variano in generale per effetto della stadiazione (ragione per cui è stata introdotta una dipendenza diretta dal tempo). Essi dipendono poi dalla velocità relativa tra lanciatore ed atmosfera, la quale ultima assumiamo ruoti solidalmente con la Terra, per cui si può scrivere

$$
\vec{v_r} = \vec{v} - \vec{v_t} \tag{2.104}
$$

per cui le componenti orizzontale e verticale della velocità relativa risultano, vedi anche (2.7)

$$
\begin{aligned}
v_{rx} &= v \cos\gamma - \omega_T r \\
v_{ry} &= v \sin\gamma
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

ed infine il modulo della velocità relativa può essere espresso come

$$
v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2} \tag{2.106}
$$

Nel caso in cui il lanciatore sia dotato di pinne orientabili, D ed L dipendono ovviamente anche dall'angolo di deflessione di queste alette. Il valore dell'accelerazione di gravità locale dipende evidentemente dal raggio. La massa del lanciatore all'istante generico risulta uguale alla massa iniziale meno la massa di propellenti consumati, meno ancora le masse strutturali degli stadi distaccati fino a quel momento. Qualcosa di analogo vale per il momento di inerzia del lanciatore all'istante generico, per il quale tuttavia non riportiamo un'espressione esplicita perché dipendente dalla geometria e dalla distribuzione delle masse. Ricordiamo poi che nelle espressioni per il moto attorno al baricentro (cioè per $\ddot{\alpha}$) entrano la distanza del centro di pressione e della sezione di uscita dell'ugello dal centro di massa, per le quali occorre quindi ricavare un'espressione esplicita per lo specifico lanciatore considerato. Infine, nell'espressione dell'angolo di disallineamento ϵ compare l'angolo χ tra la direzione dell'asse del razzo e la velocità assoluta, esprimibile a sua volta come differenza tra l'angolo tra l'orizzontale e la velocità relativa (la cui tangente è v_{ry}/v_{rx}, vedi (2.105) per le relative espressioni), e l'angolo di volo γ.

Le condizioni iniziali (al momento del lancio) comprendono una velocità data dalla componente della velocità di rotazione terrestre nel piano dell'orbita, angolo di volo nullo (ricordiamo che esso si riferisce alla velocità assoluta, che al momento del lancio ha solo la componente orizzontale dovuta alla rotazione della Terra), raggio pari al raggio della Terra, velocità di rotazione nulla ed angolo polare anch'esso nullo per definizione:

$$\begin{aligned} v_0 &= \omega_T\, R_T\, \cos i \\ \gamma_0 &= 0 \\ r_0 &= R_T \\ \dot{\alpha}_0 &= 0 \\ \theta_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.107}$$

Le condizioni finali dipendono ovviamente dall'orbita che si intende conseguire, per esempio per un'orbita circolare di raggio r_c si avrebbe

$$\begin{aligned} v_f &= (\mu/r_c)^{1/2} \\ \gamma_f &= 0 \\ r_f &= r_c \\ \dot{\alpha}_f &= 0 \\ \theta_f &= ... \end{aligned} \tag{2.108}$$

(non sussistono in genere vincoli sul valore dell'angolo polare all'iniezione θ_f, a meno che non si desideri che l'iniezione avvenga in un punto particolare). Osserviamo innanzitutto che il sistema (2.102) è un sistema differenziale ordinario (ossia non compaiono derivate parziali), il che semplifica grandemente il compito dell'integrazione, che può eseguita mediante algoritmi di integrazione numerica di tipo Runge–Kutta (eventualmente di ordine opportunamente elevato). Una prima difficoltà risiede però nel fatto che si vogliono conseguire specifiche condizioni *finali* a partire da assegnate condizioni *iniziali*, e questo richiede di individuare le forme opportune delle leggi di guida e controllo (cioè che danno l'orientazione dell'asse del razzo, individuata per esempio attraverso l'angolo di assetto, vedi successiva (2.45), e l'angolo di *gimbal* come funzioni del tempo) che consentono di conseguirle. Questa operazione di *matching* delle condizioni iniziali e finali richiede già di per sé algoritmi numerici alquanto complessi.

Si vuole inoltre ovviamente determinare, tra le varie possibili soluzioni (il problema ammette ovviamente più soluzioni), quella che risulta più economica. Possiamo interpretare questo requisito come quello di minimizzare la somma delle perdite propulsive, vedi (2.26–2.30):

$$\Delta v_{losses} \;=\; \int_0^f \left[g(r)\sin\gamma \;+\; \frac{D}{m}\cos\epsilon \;+\; \frac{L}{m}\sin\epsilon \;+\; \frac{F}{m}\left[1 \;-\; \cos(\epsilon \;+\; \beta)\right] \right] dt \tag{2.109}$$

Tale integrale risulta funzione di quello che possiamo chiamare vettore delle *variabili di stato* del sistema

$$Y \;=\; \{r, \gamma, \alpha\} \tag{2.110}$$

e delle sue derivate, le quali risultano esprimibili dalle (2.102) in funzione delle stesse variabili di stato, e di un altro vettore di *variabili di controllo*, sulle quali si può cioè intervenire per controllare il moto, come la spinta (se essa è modulabile, o comunque variabile per effetto della sequenza di stadiazione) e l'angolo di *gimbal*

$$U \;=\; \{F, \beta\} \tag{2.111}$$

Si può pertanto scrivere

$$\dot{Y} \;=\; f(Y, U, t) \tag{2.112}$$

Si noti che dalla conoscenza di Y e $\dot{Y}$ si può risalire a tutte le grandezze richieste per l'integrazione, per esempio la velocità assoluta risulta esprimibile dalle (2.7), poi quella relativa dalle (2.105).

La minimizzazione dell'integrale (2.109) equivale quindi alla minimizzazione di un funzionale del tipo

$$J = \int_0^f \Phi(Y,\dot{Y},t)\,dt \qquad (2.113)$$

sottoposto ad opportuni vincoli. In primo luogo, all'istante finale devono come detto essere soddisfatte le condizioni di inserimento nell'orbita desiderata, del tipo ad esempio (2.108). In secondo luogo, è necessario valutare i carichi dinamici e termici (cioè la pressione dinamica ed il flusso termico specifico, ossia per unità di superficie) massimi ai quali il lanciatore ed il carico utile risultano sottoposti durante la fase di ascesa, e verificare che essi non superino il valore massimo sopportabile dal satellite, tramite la protezione del *fairing*, incluso lo scudo termico. In terzo luogo, occorre verificare la traccia della traiettoria sulla superficie terrestre ed i punti di caduta degli stadi esauriti, per assicurare che non insorgano pericoli. La minimizzazione del funzionale consente quindi di identificare la legge di controllo ottimo del lanciatore durante la fase di salita in orbita.

Per conseguire questi obiettivi sono stati sviluppati codici di calcolo dedicati, tra i quali citiamo il codice ASTOS [17, 18, 19] sviluppato presso l'Istituto di Meccanica e Controllo del Volo dell'Università di Stoccarda, adottato dall'ESA (*European Space Agency*). Questi codici, oltre ad appropriati algoritmi di soluzione, comprendono anche un esteso *database* relativo alle caratteristiche dei vari lanciatori, ivi incluse per esempio le masse di propellente e strutturali dei vari stadi, le caratteristiche dei motori, le curve che riportano i coefficienti di resistenza e portanza dei vari sottorazzi che compongono un lanciatore, nelle sue differenti versioni, in funzione dell'angolo di incidenza e del numero di Mach, etc.

2.6 Impatto dell'ubicazione della base di lancio

La latitudine Λ della base di lancio impone una restrizione sull'inclinazione delle orbite conseguibili; poiché il piano dell'orbita deve appartenere al fascio che passa per il centro della Terra e per la base di lancio, l'inclinazione dell'orbita è necessariamente ristretta al campo

$$\Lambda \leq i \leq 180^o - \Lambda \qquad (2.114)$$

Quindi in particolare solo una base di lancio equatoriale ($\Lambda = 0$) consente di raggiungere qualsiasi inclinazione si desideri, mentre al contrario una base polare ($\Lambda = 90^o$) può essere utilizzata solo per lanci in orbita polare. Questo spinge ovviamente a localizzare la base di lancio quanto più vicino possibile all'equatore. Un'ulteriore spinta in questo senso viene dal fatto che tanto più la base è vicina all'equatore, tanto più alta è la velocità (assoluta) iniziale del lanciatore dovuta al moto di rotazione della Terra, che può quindi essere portata in detrazione nel computo del Δv efficace da impartire al lanciatore per conseguire una data orbita obiettivo (almeno per lanci in orbite dirette, cioè con inclinazione $0 \leq i \leq 90^o$; per lanci in orbite retrograde, $90^o < i \leq 180^o$, la velocità iniziale dovuta alla rotazione della Terra costituisce invece uno svantaggio da compensare). Le figg. 2.17, 2.18 mostrano l'ubicazione delle principali basi di lancio, e confermano la tendenza a scegliere località per quanto possibile a bassa latitudine.

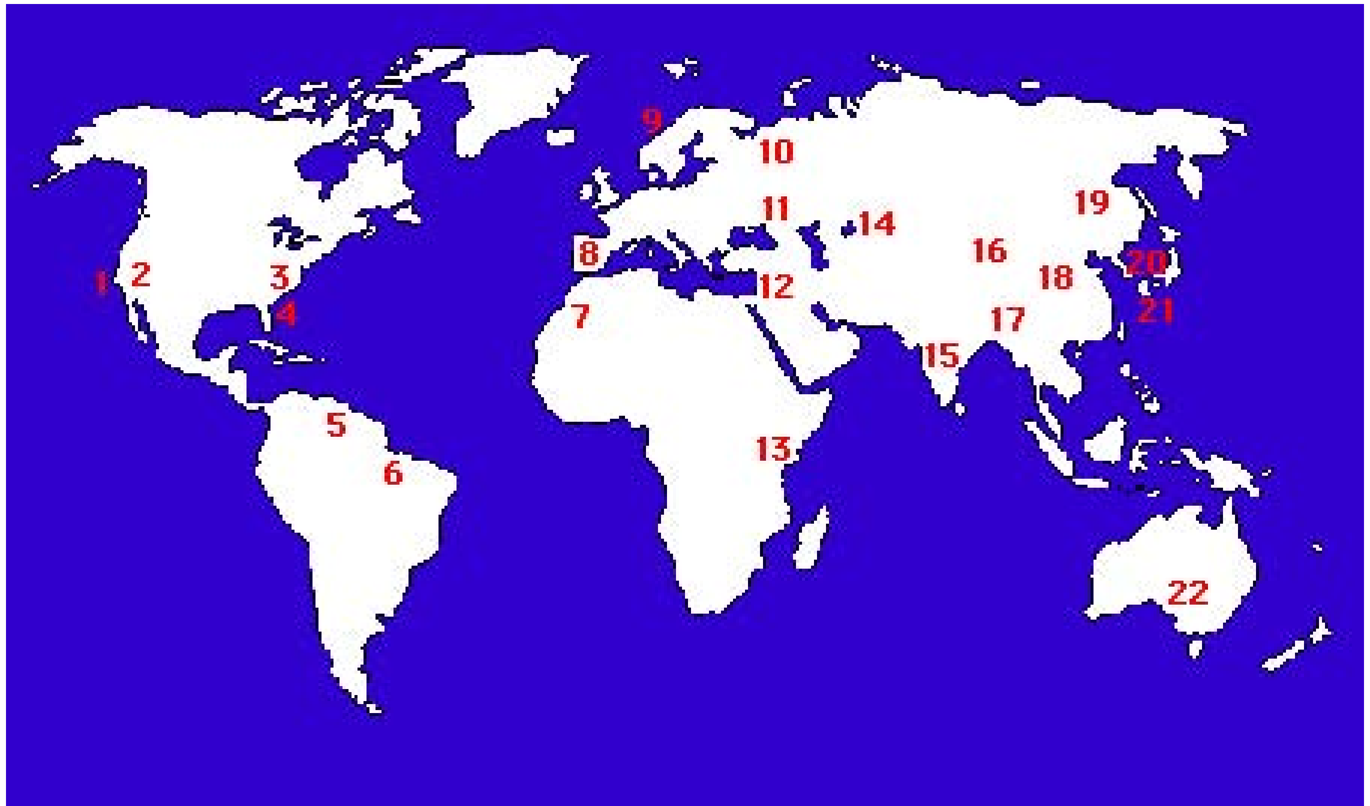


Figure 2.17: Ubicazione delle basi di lancio, da [20].

L'inclinazione i dell'orbita conseguita da una base di lancio sita alla latitudine Λ dipende dall'azimuth di lancio δ, che è l'angolo formato dalla direzione di lancio con il meridiano, contato in senso orario a partire dal nord, vedi fig. 2.19. Occorre tuttavia distinguere un angolo, che indichiamo appunto con δ, tra il meridiano e la direzione della velocità *relativa* alla Terra v_r, ed un angolo δ', tra il meridiano

Launch site	Country	Latitude	Longitude
ETR	United States	28° 30′ N	80° 33′ W
WTR	United States	34° 36′ N	120° 36′ W
Wallops Island	United States	37° 51′ N	75° 28′ W
Kourou	Europe, ESA	5° 32′ N	52° 46′ W
San Marco	Italy	2° 56′ S	40° 12′ E
Plesetsk	Soviet Union	62° 48′ N	40° 24′ E
Kapustin Yar	Soviet Union	48° 24′ N	45° 48′ E
Tyuratam (Baikonur)	Soviet Union	45° 54′ N	63° 18′ E
Thumba	UN/India	8° 35′ N	76° 52′ E
Sriharikota	India	13° 47′ N	80° 15′ E
Shuang-Ch'Eng-Tzu	China	40° 25′ N	99° 50′ E
Xichang	China	28° 06′ N	102° 18′ E
Tai-yuan	China	37° 46′ N	112° 30′ E
Wuzhai	China	38° 35′ N	111° 27′ E
Kagoshima	Japan	31° 14′ N	131° 05′ E
Osaki	Japan	30° 24′ N	130° 59′ E
Takesaki	Japan	30° 23′ N	130° 58′ E
Woomera	Australia/U.S.	31° 07′ S	136° 32′ E
Yavne	Israel	31° 31′ N	34° 27′ E

Figure 2.18: Coordinate delle basi di lancio (ETR = Cape Canaveral, WTR = Vandenberg), da [2].

e la direzione della velocità *assoluta* v, vedi fig. 2.20. L'inclinazione i risulta legata all'azimuth δ' ed a Λ, vedi fig. 2.21, dalla relazione, derivata dalla trigonometria sferica

$$\cos i \;=\; \cos\Lambda\,\sin\delta' \tag{2.115}$$

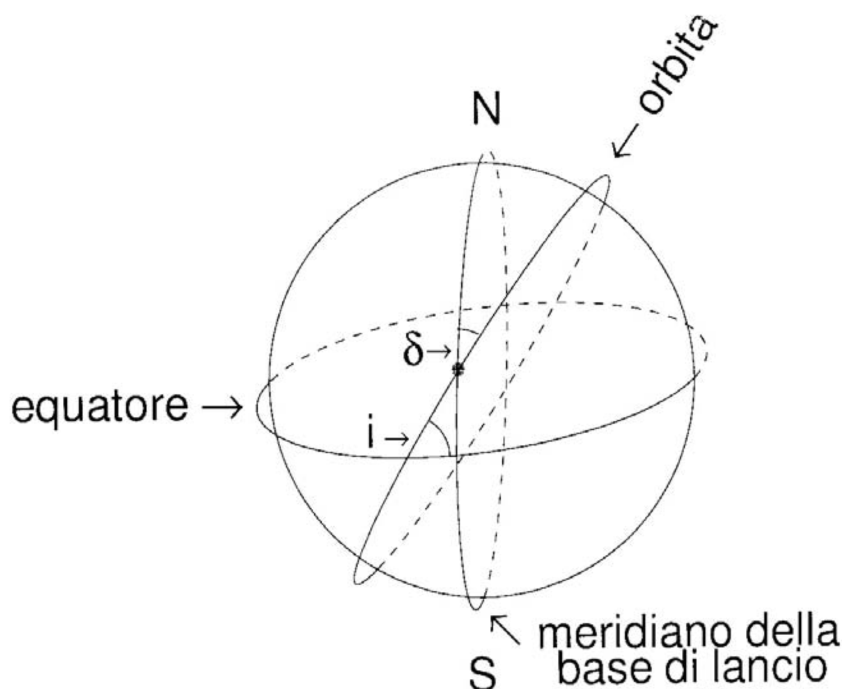


Figure 2.19: Definizione dell'azimuth di lancio.

la quale consente quindi di determinare δ' in funzione dell'inclinazione dell'orbita obiettivo, e della latitudine della base di lancio:

$$\delta' \;=\; \sin^{-1}\left(\frac{\cos i}{\cos\Lambda}\right) \tag{2.116}$$

come mostrato in fig. 2.22.

Da questa figura si può osservare che per conseguire orbite di bassa inclinazione occorrono δ' prossimi a 90° (cioè una direzione di lancio prossima all'est), mentre per orbite polari in ogni caso δ' nullo oppure 180°, e per orbite retrograde δ' minori di zero (ossia direzioni di lancio comprese nei quadranti occidentali). Più interessante risulta però, ancora fissati i e Λ, la conoscenza dell'angolo δ che la velocità relativa forma rispetto al meridiano, la quale consente di individuare la direzione dell'orizzonte verso la quale occorre indirizzare il razzo, e quindi la traccia della traiettoria sulla superficie terrestre. Dalla fig. 2.20 si ricava che le componenti della velocità assoluta nella direzione del parallelo e del meridiano possono essere legate alla velocità relativa ed alla velocità di trascinamento dovuta al moto di rotazione della Terra dalle relazioni

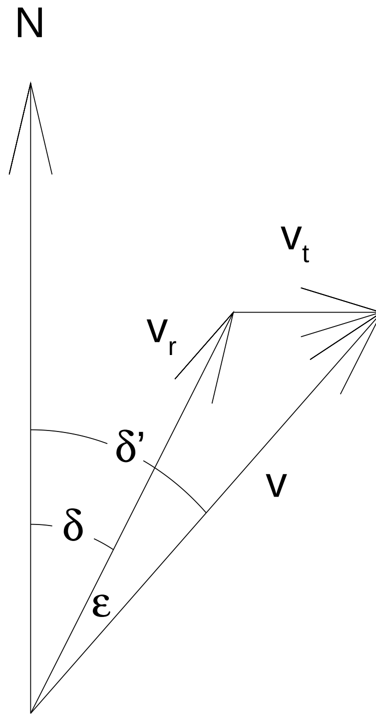


Figure 2.20: Correzione dell'azimuth di lancio per effetto della rotazione della terra.

$$\begin{cases} v\,\sin\delta' \;=\; v_r\,\sin\delta \;+\; v_t \\ v\,\cos\delta' \;=\; v_r\,\cos\delta \end{cases} \tag{2.117}$$

la seconda delle quali consente di eliminare la velocità relativa, esprimendola come

$$v_r \;=\; \frac{\cos\delta'}{\cos\delta}\,v \tag{2.118}$$

Si noti che la velocità di trascinamento è data dalla (2.32), per cui la prima delle (2.117) si riscrive come

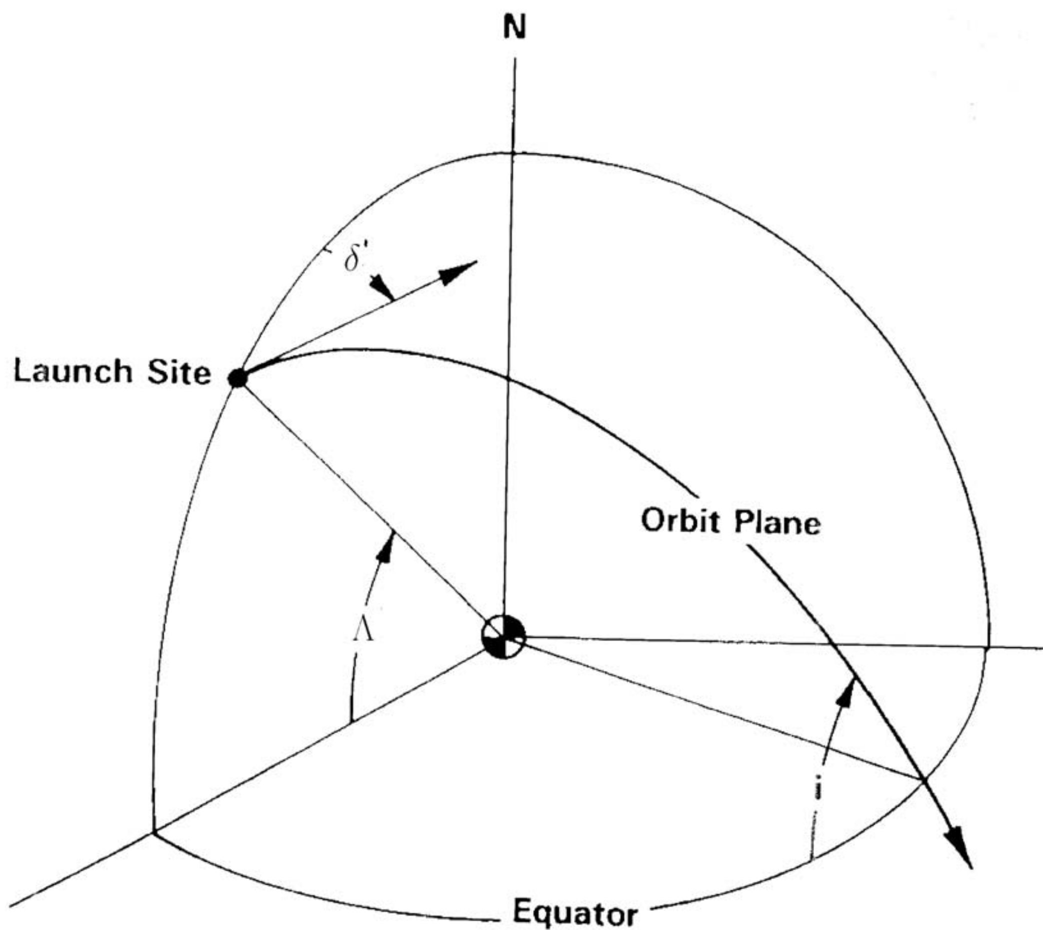


Figure 2.21: Azimuth e latitudine di lancio, adattata da [2].

$$v\,\sin\delta' \;=\; v\cos\delta'\,\tan\delta \;+\; v_{t,eq}\,\cos\Lambda \tag{2.119}$$

dalla quale è possibile esplicitare δ

$$\delta \;=\; \tan^{-1}\left(\frac{v\,\sin\delta' \;-\; v_{t,eq}\,\cos\Lambda}{v\cos\delta'}\right) \tag{2.120}$$

Quindi, ricavato δ' dalla (2.116), si ottiene poi l'angolo δ risolvendo la (2.120), come mostrato in fig. 2.23, ancora in funzione dell'inclinazione dell'orbita desiderata, con la latitudine della base di lancio come parametro. La fig. 2.24 riporta poi la differenza $\epsilon = \delta' - \delta$, in funzione di δ, sempre con

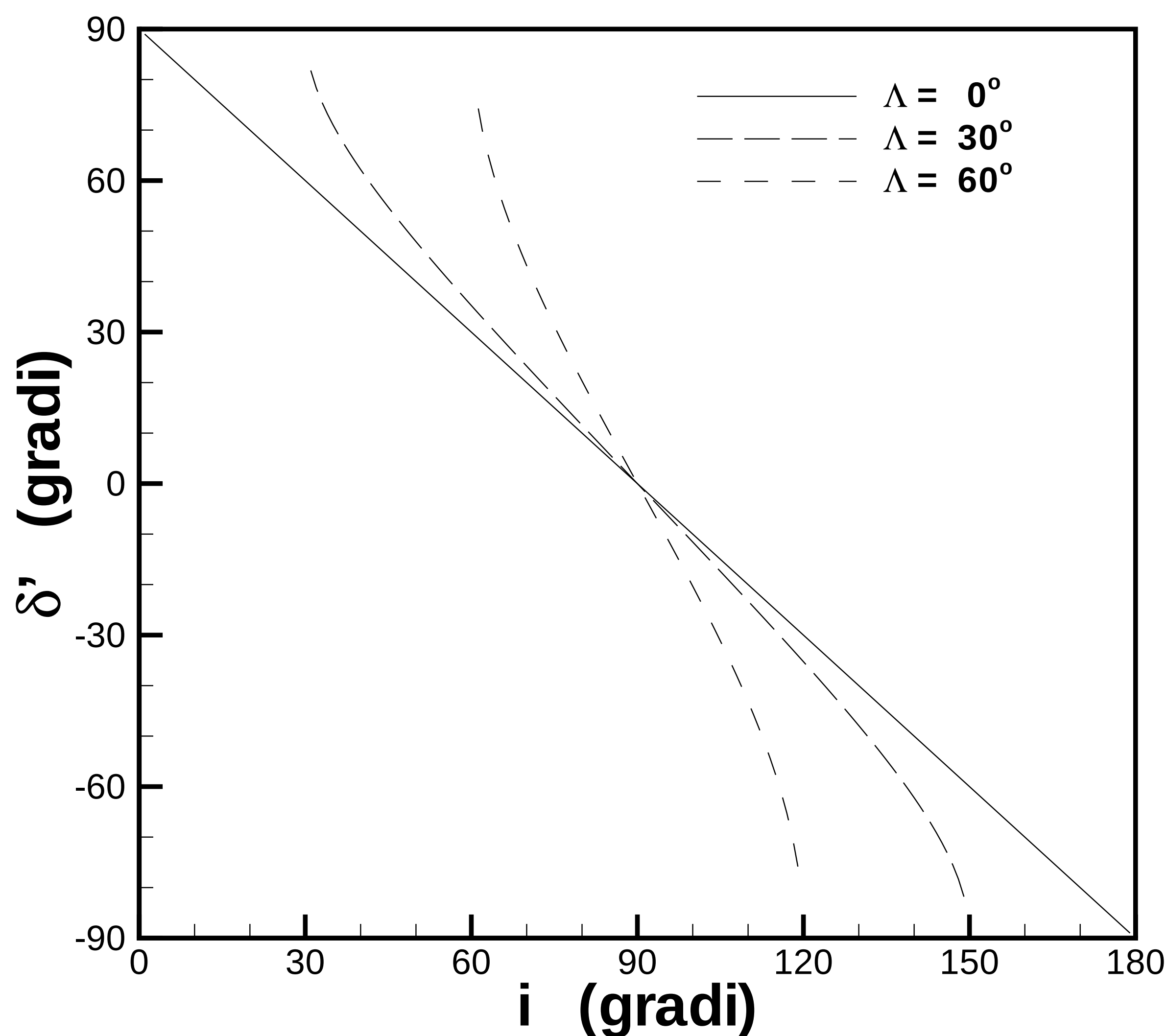


Figure 2.22: Azimuth di lancio δ' in funzione dell'inclinazione, per orbita circolare a 200 km di altezza, con la latitudine della base di lancio come parametro.

la latitudine della base di lancio come parametro, per evidenziare che la correzione dell'azimuth di lancio per effetto della rotazione terrestre è al più di pochi gradi.

Resta poi da osservare che il campo dei possibili azimuth di lancio da una data base è in genere limitato dalla necessità di evitare il sorvolo di zone abitate, ed in particolare che gli stadi esauriti cadano in tali zone, com'è mostrato in fig. 2.25 per le due basi di lancio statunitensi di Cape Canaveral

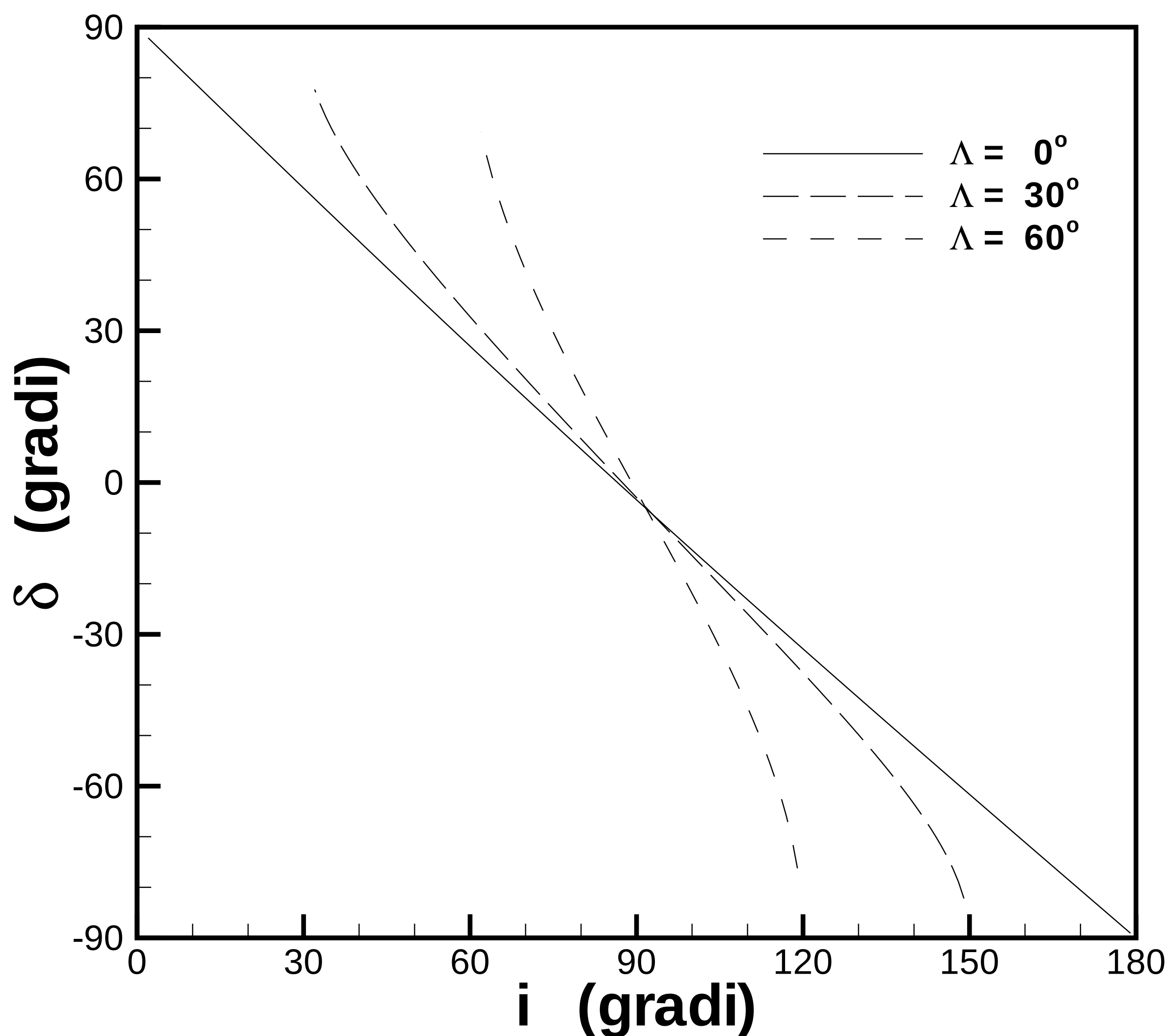


Figure 2.23: Azimuth di lancio δ in funzione dell'inclinazione, per orbita circolare a 200 km di altezza, con la latitudine della base di lancio come parametro.

(anche designata come ETR) e Vandenberg (anche designata come WTR). Si vede quindi che Cape Canaveral è adatta per il raggiungimento di orbite di inclinazione relativamente bassa (comunque non inferiore alla latitudine della base di lancio, pari a 28,5°), mentre Vandenberg è adatta per iniezione in particolare in orbite polari, eliosincrone e retrograde. Limitazioni analoghe valgono ovviamente per le altre basi di lancio.

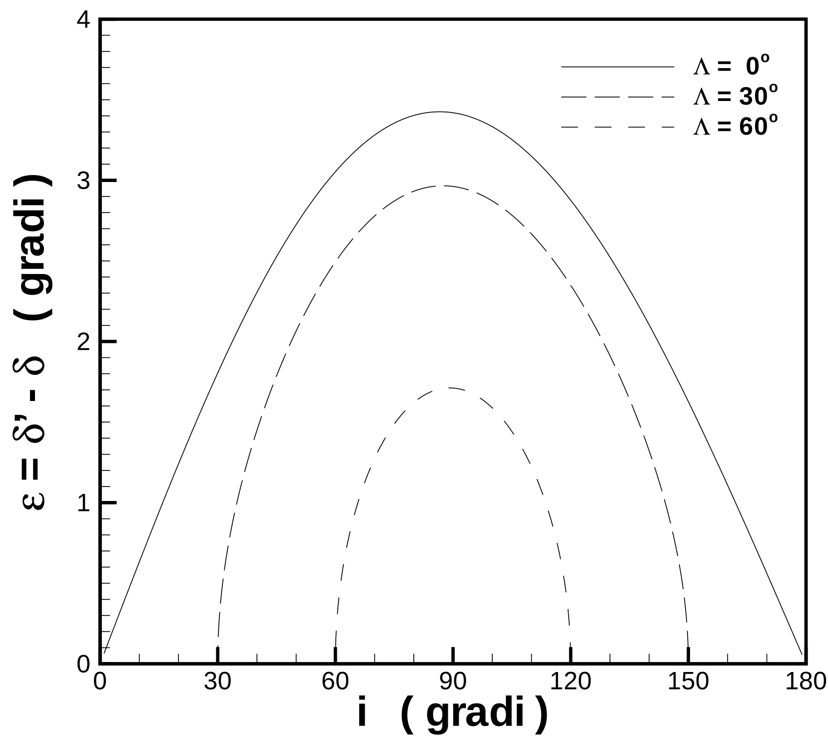


Figure 2.24: Correzione dell'azimuth di lancio in funzione dell'inclinazione, per orbita circolare a 200 km di altezza, con la latitudine della base di lancio come parametro.



Figure 2.25: Corridoi di lancio delle basi ETR (Cape Canaveral), e WTR (Vandenberg), da [2].

Capitolo 3
Manovre orbitali

Varie esigenze operative possono richiedere manovre orbitali, cioè la modifica dell'orbita del satellite, per ottenere la quale occorre applicare impulsi propulsivi. In questo capitolo esamineremo come effettuare tali manovre per conseguire l'effetto desiderato ed in particolare, come eseguirle *al costo minimo*.

Un'orbita è individuata da sei parametri orbitali (essendo la soluzione di un sistema di tre equazioni differenziali del secondo ordine, per cui in tale soluzione compaiono sei costanti di integrazione), che possono essere variamente espresse. Si può per esempio utilizzare il sestetto (a, b, ω, t_p, i, Ω), dove a è il semiasse maggiore della conica, b quello minore, ω è l'argomento del perigeo, t_p il tempo di passaggio al perigeo, i l'inclinazione, e Ω la longitudine del nodo ascendente, vedi [1], par 3.2; alternativamente si possono utilizzare i sestetti (a, e, ω, t_p, i, Ω), dove e è l'eccentricità, oppure (p, e, ω, t_p, i, Ω), dove p è il semilato retto, o ancora (r_p, e, ω, t_p, i, Ω), essendo r_p il raggio di perigeo (o, più in generale, di periabside). Le ultime due opzioni sono utilizzate in particolare per orbite iperboliche, o per il caso limite di orbite paraboliche.

Un'orbita è univocamente determinata dalla coppia posizione–velocità ($\vec{r}$, $\vec{v}$) in un suo punto qualsiasi. Ne segue che per modificare un'orbita si deve alterare il vettore velocità $\vec{v}$ in un punto che sia comune all'orbita iniziale ed a quella finale. Questo a rigore è valido per manovre *impulsive*, cioè conseguite mediante brevi accensioni del motore (quindi idealmente, tempo di spinta infinitesimo, ma spinta infinita); vedremo poi nel par. 3.3 come estendere la trattazione al caso di tempi di spinta finiti.

Esaminiamo dapprima nel par. 3.1 il caso di manovre che non contemplano una modifica dell'inclinazione del piano orbitale (per cui possiamo escludere dal computo i parametri i e Ω, o equivalentemente possiamo proiettare le equazioni del moto sul piano dell'orbita, quindi due sole equazioni con appunto quattro costanti di integrazione), per trattare poi nel par. 3.2 il caso più generale di manovre accompagnate da una correzione dell'inclinazione del piano orbitale.

3.1 Manovre nel piano dell'orbita

Esaminiamo dapprima il caso di manovra complanare generale, illustrato in fig. 3.1, nella quale si passa, mediante una manovra impulsiva, da un'orbita iniziale, con velocità $\vec{v}_i$, ad un'orbita finale con velocità $\vec{v}_f$, la quale forma un angolo α con la velocità iniziale. Il Δv da fornire per effettuare la manovra si ricava dal teorema di Carnot come

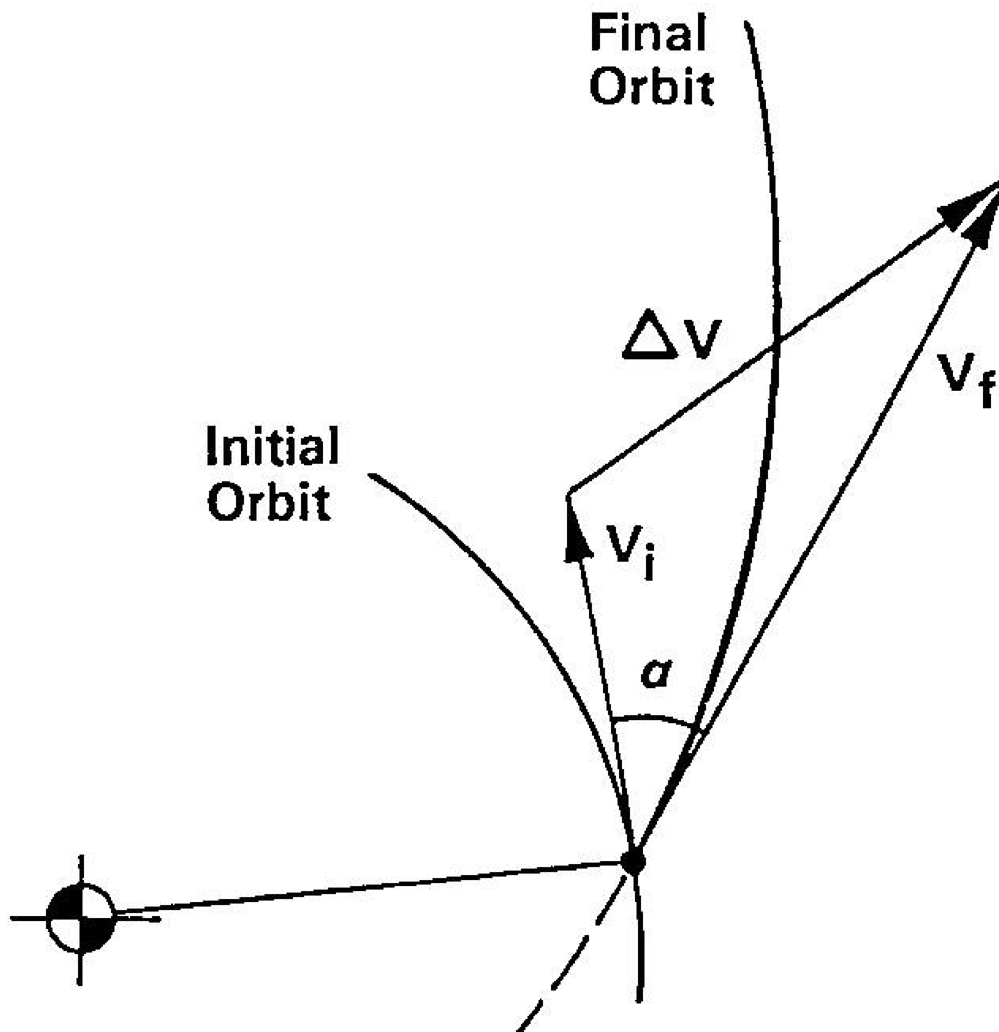


Figure 3.1: Manovra complanare generale.

$$\Delta v = \sqrt{v_i^2 + v_f^2 - 2\, v_i\, v_f \cos\alpha} \tag{3.1}$$

Si osserva in particolare che, assegnati i moduli della velocità iniziale e finale, il Δv risulta minimo per α uguale a zero (per cui $\cos\alpha = 1$), ossia quando le orbite sono tangenti tra loro nel punto in cui si effetta la manovra, nel qual caso si ha

$$\Delta v = v_f - v_i \tag{3.2}$$

Esempi di manovre complanari sono i trasferimenti da orbita circolare bassa ad orbita alta, l'iniezione, a partire da un'orbita circolare, in una generica orbita ellittica, parabolica, o iperbolica, e le manovre di compensazione di alcuni tipi di perturbazioni orbitali.

3.1.1 Trasferimento da orbita circolare bassa ad orbita circolare alta

Consideriamo, vedi fig. 3.2, un trasferimento da un'orbita circolare bassa di raggio r_i ad un'orbita circolare alta di raggio r_f (come potrebbe essere il caso, per esempio, di un trasferimento da un'orbita terrestre bassa ad un'orbita geostazionaria). Possiamo ricorrere ad un trasferimento alla Hohmann (vedi [1], par. 5.2.3), nel quale il veicolo viene dapprima iniettato (cosidetta *manovra di perigeo*) in un'ellisse di trasferimento, con raggio di perigeo $r_{pt} = r_i$ e raggio di apogeo $r_{at} = r_f$ (o periabside/apoabside nel caso più generale); tale ellisse risulta quindi tangente ad entrambe le orbite, condizione che come detto minimizza l'incremento di velocità da fornire. Successivamente, quando dopo avere percorso metà ellisse il veicolo si trova all'apogeo di quest'ultima, l'orbita viene circolarizzata fornendo un secondo impulso propulsivo (cosidetta *manovra di apogeo*). Calcoliamo i Δv richiesti dalle due manovre. Le velocità circolari sull'orbita iniziale e finale sono rispettivamente

$$v_i = \sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \tag{3.3}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \tag{3.4}$$

essendo ovviamente μ la costante di potenziale di sorgente del centro di attrazione (in particolare, μ_T per la Terra). Il Δv della manovra di perigeo è ovviamente dato dalla differenza tra la velocità di

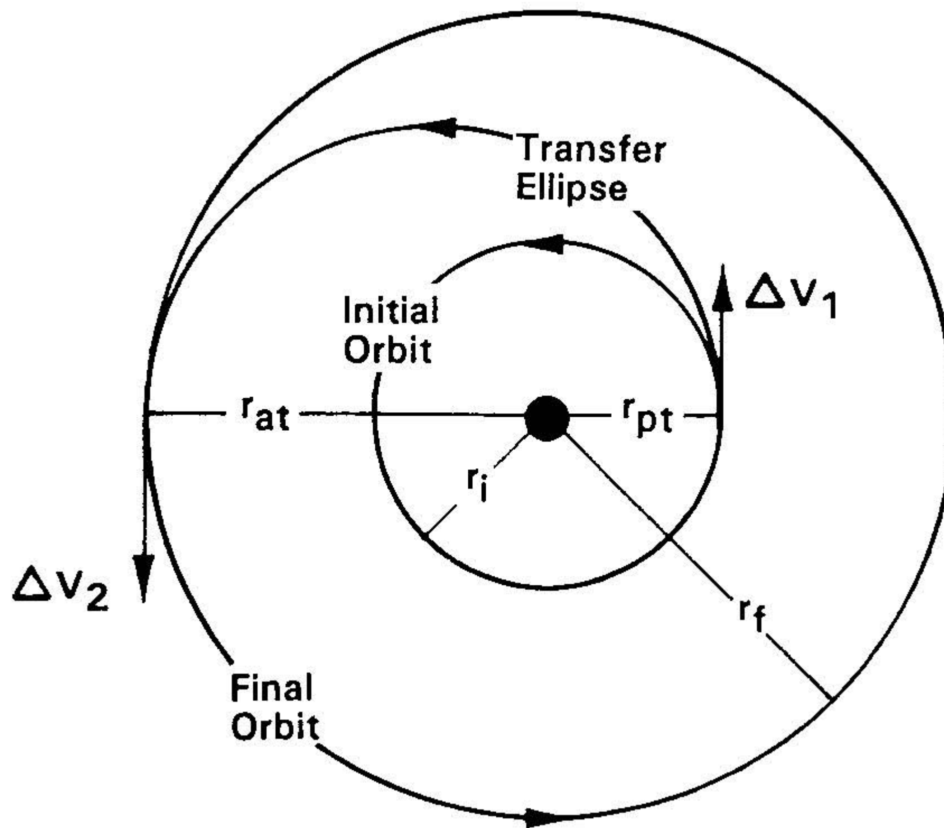


Figure 3.2: Trasferimento alla Hohmann.

perigeo dell'orbita di trasferimento, e la velocità iniziale sull'orbita bassa; in modo simile, il Δv della manovra di apogeo è dato dalla differenza tra la velocità finale sull'orbita alta e la velocità all'apogeo dell'orbita ellittica di trasferimento (si osservi che, essendo le orbite tangenti fra loro nei punti in cui viene effettuata la manovra, l'angolo α della (3.1) risulta nullo). Occorre quindi determinare le velocità al perigeo ed all'apogeo dell'orbita di trasferimento, il che richiede innanzitutto di identificare il semiasse maggiore di tale ellisse, dato evidentemente da

$$a_t = \frac{r_{pt} + r_{at}}{2} = \frac{r_i + r_f}{2} \tag{3.5}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica totale si trova subito che la velocità al perigeo ($r = r_{pt} =$

r_i) è

$$v_{pt} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{a_t} \right)} = \sqrt{2\,\mu \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} \tag{3.6}$$

nella quale nel secondo passaggio è stata utilizzata la (3.5). In modo del tutto analogo, la velocità all'apogeo ($r = r_{at} = r_f$) risulta

$$v_{at} = \sqrt{2\,\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} \tag{3.7}$$

I Δv richiesti dalle manovre di perigeo ed apogeo si determinano quindi, per quanto detto, rispettivamente come

$$\Delta v_1 = v_{pt} - v_i \tag{3.8}$$

$$\Delta v_2 = v_f - v_{at} \tag{3.9}$$

Il tempo di trasferimento tra l'orbita bassa e l'orbita alta è evidentemente la metà del periodo dell'ellisse di trasferimento (vedi [1], par. 2.6)

$$T_{trasf} = \frac{1}{2} \frac{2\,\pi\, a_t^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi\, a_t^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \tag{3.10}$$

La manovra alla Hohmann risulta essere, entro certi limiti che indicheremo fra breve, la manovra più economica per trasferimento da un'orbita circolare bassa ad un'orbita circolare alta, ma al tempo stesso è quella che richiede i tempi di trasferimento più lunghi (tra le manovre a due soli impulsi). Quest'ultima circostanza non pone in genere problemi per trasferimenti nell'intorno della Terra, mentre può risultare problematica per trasferimenti interplanetari.

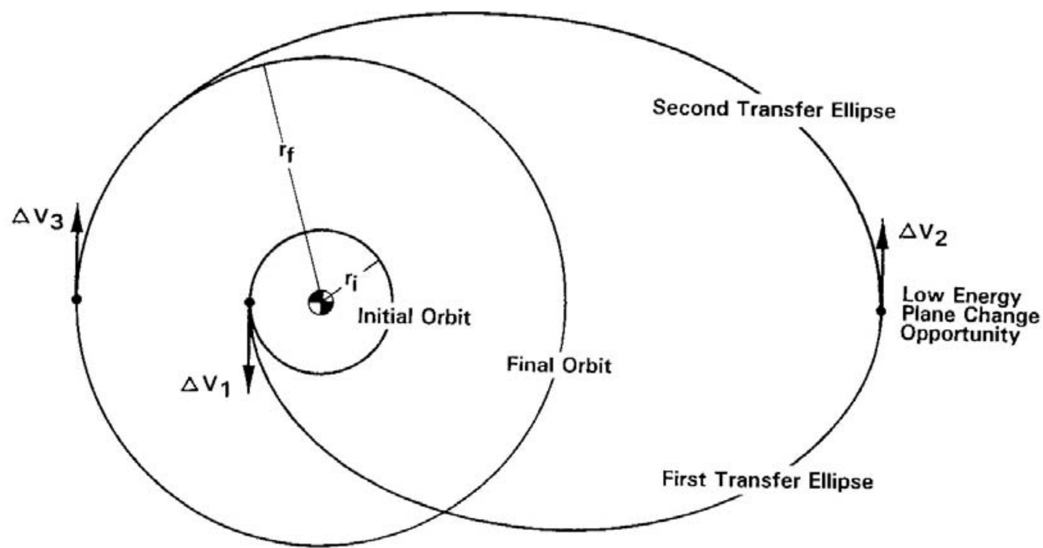


Figure 3.3: Trasferimento biellittico.

Un'altra opzione per il trasferimento da orbita bassa ad orbita alta è il trasferimento biellittico, in cui il veicolo è dapprima immesso in un'ellisse di trasferimento con raggio di apogeo r_{at} *maggiore* del raggio r_f dell'orbita finale desiderata, quindi all'apogeo di tale prima orbita di trasferimento viene immesso in un'altra orbita ellittica di trasferimento, il cui raggio di perigeo r_{pt2} coincide con il raggio r_f dell'orbita finale; giunti appunto al perigeo, viene infine eseguita una manovra di circolarizzazione. Per calcolare il Δv complessivo richiesto da questa manovra biellittica, consideriamo innanzitutto che le velocità iniziali e finali sono date dalle (3.3, 3.4), restano quindi da invidiare le velocità al perigeo ed all'apogeo delle due orbite di trasferimento. La prima orbita di trasferimento ha semiasse maggiore $a_{t1} = (r_i + r_{at})/2$, per cui le velocità al perigeo ed all'apogeo, analogamente alle (3.6, 3.7), risultano rispettivamente

$$v_{pt1} = \sqrt{2\,\mu\,\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_{at}}\right)} \tag{3.11}$$

$$v_{at1} = \sqrt{2\,\mu\,\left(\frac{1}{r_{at}} - \frac{1}{r_i + r_{at}}\right)} \tag{3.12}$$

La seconda ellisse di trasferimento ha semiasse maggiore $a_{t2} = (r_f + r_{at})/2$, per cui le velocità di apogeo e perigeo risultano rispettivamente

$$v_{at2} = \sqrt{2\,\mu \left(\frac{1}{r_{at}} - \frac{1}{r_f + r_{at}}\right)} \tag{3.13}$$

$$v_{pt2} = \sqrt{2\,\mu \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_f + r_{at}}\right)} \tag{3.14}$$

Il Δv complessivo sarà quindi la somma dell'incremento di velocità necessario per iniettare il veicolo nella prima ellisse di trasferimento (applicato al perigeo di quest'ultima)

$$\Delta v_1 = v_{pt1} - v_i \tag{3.15}$$

poi di quello necessario per l'iniezione nella seconda orbita di trasferimento (applicato all'apogeo comune delle due ellissi di trasferimento)

$$\Delta v_2 = v_{at2} - v_{at1} \tag{3.16}$$

ed infine di quello necessario per circolarizzare l'orbita, tramite una riduzione della velocità al perigeo della seconda ellisse di trasferimento

$$\Delta v_3 = v_{at2} - v_f \tag{3.17}$$

Il trasferimento biellittico risulta conveniente rispetto al trasferimento alla Hohmann quando il rapporto tra i raggi delle orbite finale ed iniziale r_f/r_i è maggiore di circa 15,58, come riportato in fig. 3.4, nella quale è stato assunto un raggio dell'orbita iniziale di 6667 km (quindi un'altezza $h_i = r_i - R_T \simeq 288{,}5$ km), e sono stati considerati tre valori del raggio di apogeo (indicato nella legenda come r_{at}, mentre con r_f è indicato il raggio dell'orbita finale) dell'orbita ellittica di trasferimento. Nella figura è stato incluso anche il caso limite di trasferimento biparabolico (cioè per $r_{at} \to \infty$), puramente ipotetico in quanto comporta un'uscita dalla sfera d'influenza della Terra, oltre a tempi di trasferimento infiniti.

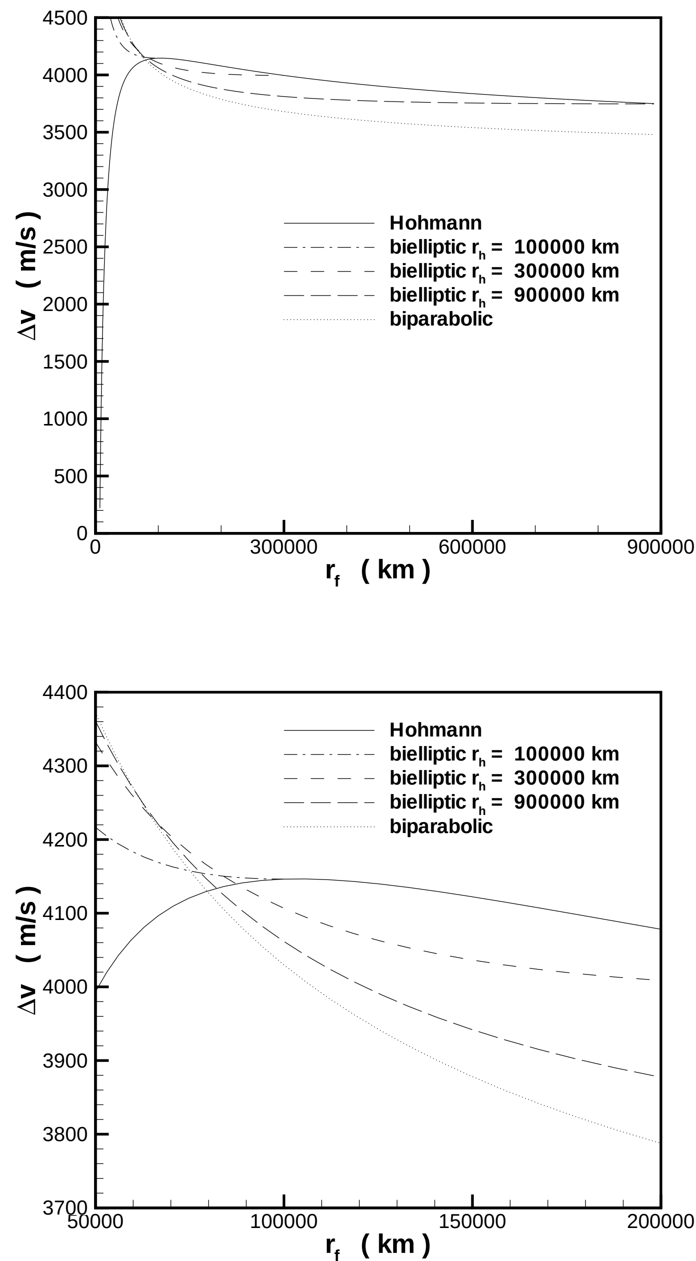


Figure 3.4: Δv per trasferimenti complanari alla Hohmann (linea continua), biellittico e biparabolico ($r_i = 6667$ km).

Notiamo innanzitutto in questa figura che, per i trasferimenti biellittici, le curve sono ovviamente limitate ad un valore del raggio finale uguale a quello dell'apogeo delle ellissi di trasferimento. Os-

serviamo poi che per valori relativamente contenuti del raggio dell'orbita finale (al disotto dei 100000 km) il trasferimento biellittico comporta un Δv molto più elevato di un trasferimento alla Hohmann, ma per raggi finali al disopra di circa 100000 km (o meglio, 15,58 volte il raggio iniziale, quindi poco meno di 104000 km) il trasferimento biellittico richiede Δv lievemente inferiori a quelli del trasferimento alla Hohmann, il guadagno essendo tanto più alto quanto maggiore è il raggio di apogeo dell'orbita di trasferimento. Quest'ultimo è tuttavia limitato dall'esigenza di non uscire dalla sfera di influenza della Terra, il cui raggio è intorno ad un milione di chilometri. Tale guadagno è comunque contenuto, e va inoltre pesato con il fatto che i tempi di trasferimento sono ancora più lunghi rispetto al trasferimento alla Hohmann, in quanto bisogna in questo caso percorrere *due* semiellissi (anziché una sola) entrambe di semiasse maggiore molto più grande rispetto alla semiellisse di Hohmann, vedi anche (3.10). Inoltre, il trasferimento biellittico richiede l'applicazione di tre impulsi propulsivi, contro i due del trasferimento alla Hohmann, con conseguente complicazione del sistema propulsivo e minore affidabilità.

3.1.2 Iniezione in orbita ellittica, parabolica o iperbolica a partire da un'orbita circolare

Affrontiamo ora il problema più generale dell'iniezione di un veicolo, inizialmente parcheggiato su un'orbita circolare (in particolare una LEO conseguita da un lanciatore), in una generica orbita ellittica, parabolica o iperbolica. Se applichiamo un impulso propulsivo in un punto dell'orbita iniziale, caratterizzato da valori di velocità, angolo di volo e raggio (v_i, γ_i, r_i), ed in particolare applichiamo tale Δv tangenzialmente alla traiettoria, come abbiamo visto essere la soluzione più conveniente, vedi (3.1, 3.2), si ottiene la seguente terna di valori finali (cioè al termine dell'impulso propulsivo):

$$v_f = v_i + \Delta v \tag{3.18}$$

$$\gamma_f = \gamma_i \tag{3.19}$$

$$r_f = r_i \tag{3.20}$$

dove evidentemente la seconda deriva in particolare dall'aver assunto il Δv tangente alla velocità iniziale, e la terza dall'aver assunto tempi di spinta tendenti a zero (manovra impulsiva). In base a questi valori è quindi possibile valutare l'energia meccanica $\mathcal{E}_f$ ed il momento angolare $\hat{h}_f$ dell'orbita

finale secondo le (2.33, 2.34), e di conseguenza determinare i valori dei parametri orbitali finali, in particolare semiasse maggiore ed eccentricità, vedi anche [1], par 1.10:

$$a_f = -\frac{\mu}{2\,\mathcal{E}_f} \tag{3.21}$$

$$e_f = \sqrt{1 - \frac{\hat{h}_f^2}{\mu\, a_f}} \tag{3.22}$$

3.1.3 Correzione dei parametri orbitali

Le inaccuratezze di iniezione in orbita da parte di un lanciatore, o le perturbazioni orbitali, possono portare alla necessità di correggere alcuni parametri orbitali. Analizziamo di seguito come eseguire le più importanti manovre di questo tipo (sempre restando per ora nel campo delle manovre nel piano dell'orbita).

Correzione del valore del semiasse maggiore

Oltre alle inaccuratezze di iniezione, diverse esigenze possono portare alla necessità di modificare il valore del semiasse maggiore di un'orbita. In un'orbita ellittica di raggio di perigeo relativamente basso, in occasione dei passaggi nell'intorno del perigeo stesso il satellite sarà rallentato dalla pur piccola resistenza atmosferica, il che porta ad una riduzione dell'energia meccanica totale e quindi ad una riduzione del valore del semiasse maggiore per le (2.33, 2.35); poiché il raggio di perigeo non viene alterato dal rallentamento, questo porta necessariamente ad un abbassamento del valore del raggio di apogeo. Per ripristinare l'orbita iniziale, sarà perciò necessario di quando in quando applicare un impulso propulsivo per aumentare il semiasse maggiore, il quale andrà necessariamente applicato al perigeo. Un'altra situazione in cui si pone l'esigenza di aumentare il valore del semiasse maggiore si presenta a fine vita dei satelliti (tipicamente militari) in cui l'energia elettrica per il funzionamento delle apparecchiature di bordo è fornita da generatori che sfruttano il calore prodotto dal decadimento di isotopi radioattivi, come il plutonio 238, Pu^{238}, la cui ricaduta a terra per effetto del progressivo abbassamento dell'orbita per la resistenza atmosferica porrebbe gravi problemi di

inquinamento radioattivo[7]. Per evitare la ricaduta del satellite, si utilizza allora tutto il propellente rimasto nei serbatoi a fine vita per innalzare quanto più possibile il perigeo (riducendo in tal modo fortemente le perturbazioni aerodinamiche, ed allungando perciò notevolmente la vita del satellite, anche se, a causa della lunga vita media del Pu^{238}, non abbastanza da risolvere definitivamente il problema). Per innalzare il perigeo, occorre applicare l'impulso propulsivo all'apogeo.

In ogni caso, l'entità della correzione in termini di Δv si determina dalle energie meccaniche totali dell'orbita prima della correzione

$$\mathcal{E}_i = \frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2\,a_i} \tag{3.23}$$

e dopo la correzione stessa

$$\mathcal{E}_f = \frac{v_f^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2\,a_f} \tag{3.24}$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni (e moltiplicando per due) si trova

$$v_f^2 - v_i^2 = \mu \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_f} \right) \tag{3.25}$$

e quindi il Δv da applicare:

$$\Delta v = \sqrt{v_i^2 + \mu \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_f} \right)} - v_i \tag{3.26}$$

È interessante anche quantificare la sensibilità del valore del semiasse maggiore alla correzione di

[7]Si osservi comunque che l'isotopo 238 del plutonio non è fissile, cioè non può dar luogo a reazioni a catena, a differenza degli isotopi 239 e (teoricamente) 241.

velocità. Ciò può essere appurato differenziando la (3.25), nella quale i valori relativi all'orbita iniziale devono essere considerati come costanti, per cui si ottiene

$$v\,dv \;=\; \frac{\mu}{2\,a^2}\,da \tag{3.27}$$

per cui la sensibilità cercata (variazione del semiasse maggiore in m per variazione di velocità unitaria, cioè un m/s) risulta

$$\frac{da}{dv} \;=\; \frac{2\,v\,a^2}{\mu} \tag{3.28}$$

L'eccentricità dell'orbita risultante può essere determinata, per manovre effettuate all'apogeo (per cui r_a resta invariato), dalla (vedi [1], par. 1.9.1)

$$e \;=\; \frac{r_a}{a} \,-\, 1 \tag{3.29}$$

e, per manovre effettuate al perigeo (per cui r_p resta invariato), dalla

$$e \;=\; 1 \,-\, \frac{r_p}{a} \tag{3.30}$$

Riposizionamento

In alcuni casi è importante che il satellite mantenga una determinata posizione rispetto alla superficie terrestre, come è per esempio il caso di un satellite in GEO, vedi par. 1.2.3. Se per qualche motivo (perturbazioni orbitali, inaccuratezze d'iniezione) il satellite tende a spostarsi lentamente dalla sua posizione nominale (moto di *drift*), occorre di tanto in tanto applicare una correzione per riportare il satellite nel punto originario. A questo scopo, si altera il periodo di rivoluzione del satellite, dato dalla relazione (vedi [1], par. 2.6)

$$T = \frac{2\,\pi\,a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \tag{3.31}$$

il che può essere ottenuto solo alterando il valore del semiasse maggiore a. La sensibilità del periodo di rivoluzione ad una variazione del semiasse maggiore si ricava derivando la (3.31)

$$\frac{dT}{da} = 3\,\pi\,\sqrt{\frac{a}{\mu}} \tag{3.32}$$

Abbiamo appena visto che per correggere il semiasse maggiore occorre a sua volta correggere la velocità, per cui sostituendo nella (3.32) l'espressione per da che si ricava dalla (3.28) si ottiene

$$\frac{dT}{dv} = 6\,\pi\,\frac{v\,a^{5/2}}{\mu^{3/2}} \tag{3.33}$$

che dà appunto di quanto varia il periodo orbitale per effetto dell'applicazione di un impulso di velocità unitario. Per ogni orbita il satellite si sposta allora rispetto alla posizione iniziale di un angolo

$$\frac{v\,dT}{a} = 6\,\pi\,\frac{v^2\,a^{3/2}}{\mu^{3/2}}\,dv \qquad \frac{\text{rad}}{\text{orbita}} \tag{3.34}$$

per cui per correggere la posizione angolare del satellite lungo la sua orbita di un angolo $\Delta\theta$, occorrerà fare in modo che esso descriva un numero di orbite pari a $\Delta\theta$ diviso la (3.34), dove a dv va sostituito il valore, piccolo ma finito, della correzione di velocità apportata. Una volta che il satellite è tornato nella posizione desiderata, andrà poi applicata una correzione di velocità uguale ed opposta per riportare il periodo di rivoluzione al valore nominale.

Si osservi che, quando la manovra di riposizionamento viene applicata ad orbite non circolari, essa corrisponde ad una correzione del tempo di passaggio al perigeo t_p.

Correzione dell'orientazione dell'asse maggiore

Un'orbita ellittica, per effetto delle perturbazioni dovute alla non sfericità della Terra, è sottoposta ad un moto di precessione della linea degli absidi, la cui orientazione varia quindi nel tempo, o equivalentemente varia nel tempo l'argomento del perigeo ω (angolo tra la direzione del nodo ascendente e quella del perigeo, rispetto al centro di attrazione). Ad esempio, nella fig. 3.5 è indicata a tratto pieno una generica orbita ellittica, la quale per effetto della precessione absidale dopo un certo tempo assume la posizione indicata dalla linea tratteggiata, in cui l'asse maggiore è ruotato di un angolo α rispetto alla posizione iniziale. L'orbita iniziale e l'orbita finale hanno in comune due punti, uno situato in prossimità del perigeo, l'altro in prossimità dell'apogeo, per cui l'impulso propulsivo per riportare l'orbita all'orientazione originaria va necessariamente applicato in uno di questi due punti.

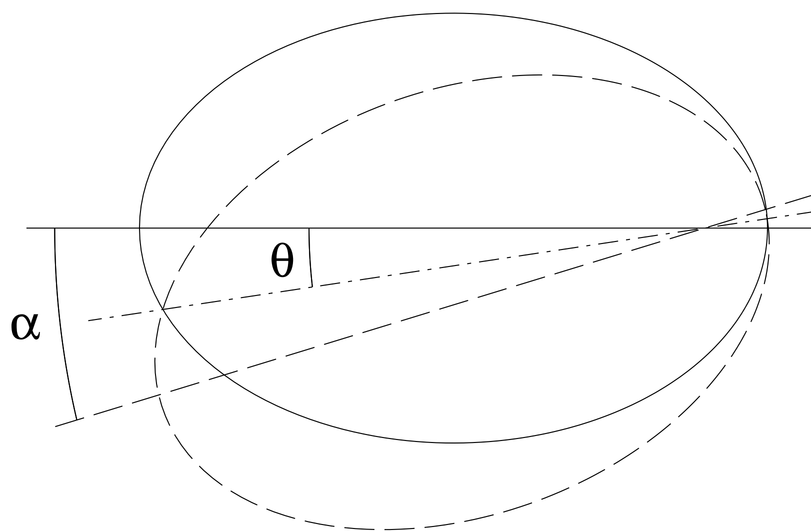


Figure 3.5: Manovra di correzione dell'argomento del perigeo.

Nella fig. 3.5, come detto, si è supposto che la linea degli absidi sia ruotata di un angolo α rispetto alla posizione iniziale. I punti comuni alle due orbite si trovano sulla bisettrice dell'angolo α, per cui l'angolo θ tra la linea degli absidi e tale bisettrice è

$$\theta = \frac{\alpha}{2} \tag{3.35}$$

L'anomalia vera del punto comune alle due orbita sito in prossimità dell'apogeo è

$$\nu = \pi - \theta \tag{3.36}$$

mentre l'anomalia vera dell'analogo punto in prossimità del perigeo risulta

$$\nu = -\theta \tag{3.37}$$

supponendo che l'orbita sia descritta in senso antiorario. L'energia meccanica totale

$$\mathcal{E} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2\,a} \tag{3.38}$$

è la stessa per le due orbite (varia solo l'orientazione dell'asse maggiore), per cui la velocità in un generico punto distante r dal centro di attrazione è esprimibile come

$$v = \sqrt{2\left(\mathcal{E} + \frac{\mu}{r}\right)} \tag{3.39}$$

Il raggio r del punto di data anomalia vera può essere trovato come (vedi [1], par. 1.9.1)

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,\cos\nu} \tag{3.40}$$

La velocità (3.39) del punto di data anomalia vera può essere scissa in una componente radiale

$$v_r \;=\; v\,\sin\gamma \tag{3.41}$$

ed una componente secondo l'orizzontale locale

$$v_o \;=\; v\,\cos\gamma \tag{3.42}$$

In queste espressioni l'angolo di volo γ può essere ricavato dalla relazione (vedi [1], par. 2.5)

$$\tan\gamma \;=\; \frac{e\,\sin\nu}{1\,+\,e\,\cos\nu} \tag{3.43}$$

Per riportare l'asse maggiore all'orientazione iniziale, bisogna cambiare la velocità nel punto in questione in modo tale che la componente orizzontale (3.42) resti inalterata, mentre la componente radiale 3.41) deve cambiare segno (per esempio, per il punto comune in prossimità dell'apogeo, e sempre supponendo l'orbita descritta in senso antiorario, la componente radiale è diretta verso l'esterno nel punto considerato sull'orbita tratteggiata, mentre deve essere diretta verso l'interno per riportare il satellite nell'orbita originaria a tratto pieno; l'opposto avviene per il punto comune in prossimità del perigeo). Occorre perciò fornire una correzione di velocità pari a due volte la componente radiale:

$$\Delta v \;=\; 2\;|v_r| =\; 2\,v_o\;|\tan\gamma| =\; 2\,\frac{\hat{h}}{r}\,|\tan\gamma| \tag{3.44}$$

In questa espressione il raggio è legato all'anomalia vera del punto in cui si effettua la correzione dalla (3.40), come pure la tangente di γ attraverso la (3.43). Il Δv richiesto può perciò essere espresso come

$$\Delta v \;=\; 2\,\frac{\hat{h}}{r}\,|\tan\gamma| =\; \frac{2\,\hat{h}\,e}{a\,(1\,-\,e^2)}\;|\sin\nu| \tag{3.45}$$

Si noti che, in base alle (3.36,3.37), esso risulta identico sia che la manovra venga effettuata nel punto comune alle due orbite sito in prossimità dell'apogeo, oppure in quello sito in prossimità del perigeo. Tale Δv è riportato in fig. 3.6 in funzione dell'angolo di correzione, per orbite ellittiche di altezza di perigeo h_p = 500 km, e tre differenti valori dell'altezza di apogeo h_a, o equivalentemente

dell'eccentricità. Il valore $h_a = 39867$ km corrisponde ad un'orbita di periodo pari alla metà di un giorno siderale (quali quelle dei satelliti Molniya, le quali però giacciono su un piano di inclinazione tale da annullare gli effetti di precessione absidale, vedi 1.2.4).

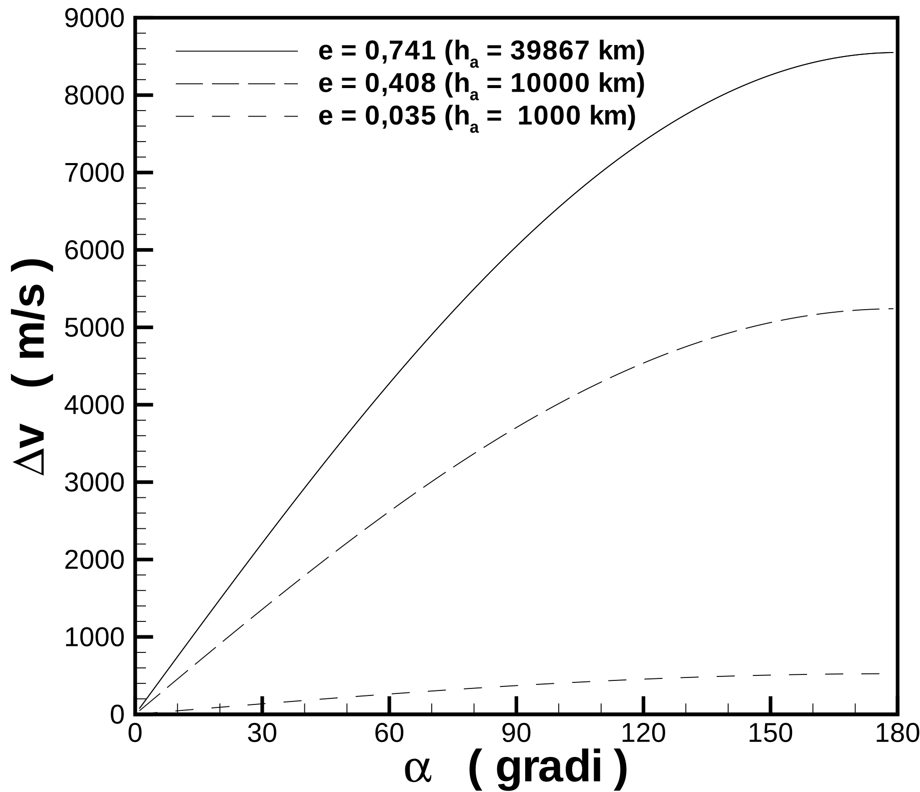


Figure 3.6: Δv per correzione della linea degli absidi, in funzione dell'angolo di correzione α; altezza del perigeo $h_p = 500$ km, eccentricità (e conseguente altezza dell'apogeo) a parametro.

Abbiamo dunque visto in questo paragrafo come correggere i valori del semiasse maggiore a, dell'eccentricità e, come riposizionare un satellite (o equivalentemente, come correggere il tempo di passaggio al perigeo t_p), e come correggere l'argomento del perigeo ω.

3.2 Manovre con correzione dell'inclinazione del piano orbitale

Fino a qui sono state esaminate manovre nel piano dell'orbita, che quindi non incidono sull'inclinazione i del piano orbitale, né sulla longitudine Ω del nodo ascendente. Molto spesso però è necessaria una

correzione dell'inclinazione del piano orbitale, in particolare per raggiungere orbite di bassa inclinazione a partire da basi di lancio site a latitudini Λ relativamente elevate, per effetto del vincolo (2.114), oppure per missioni verso altri corpi celesti.

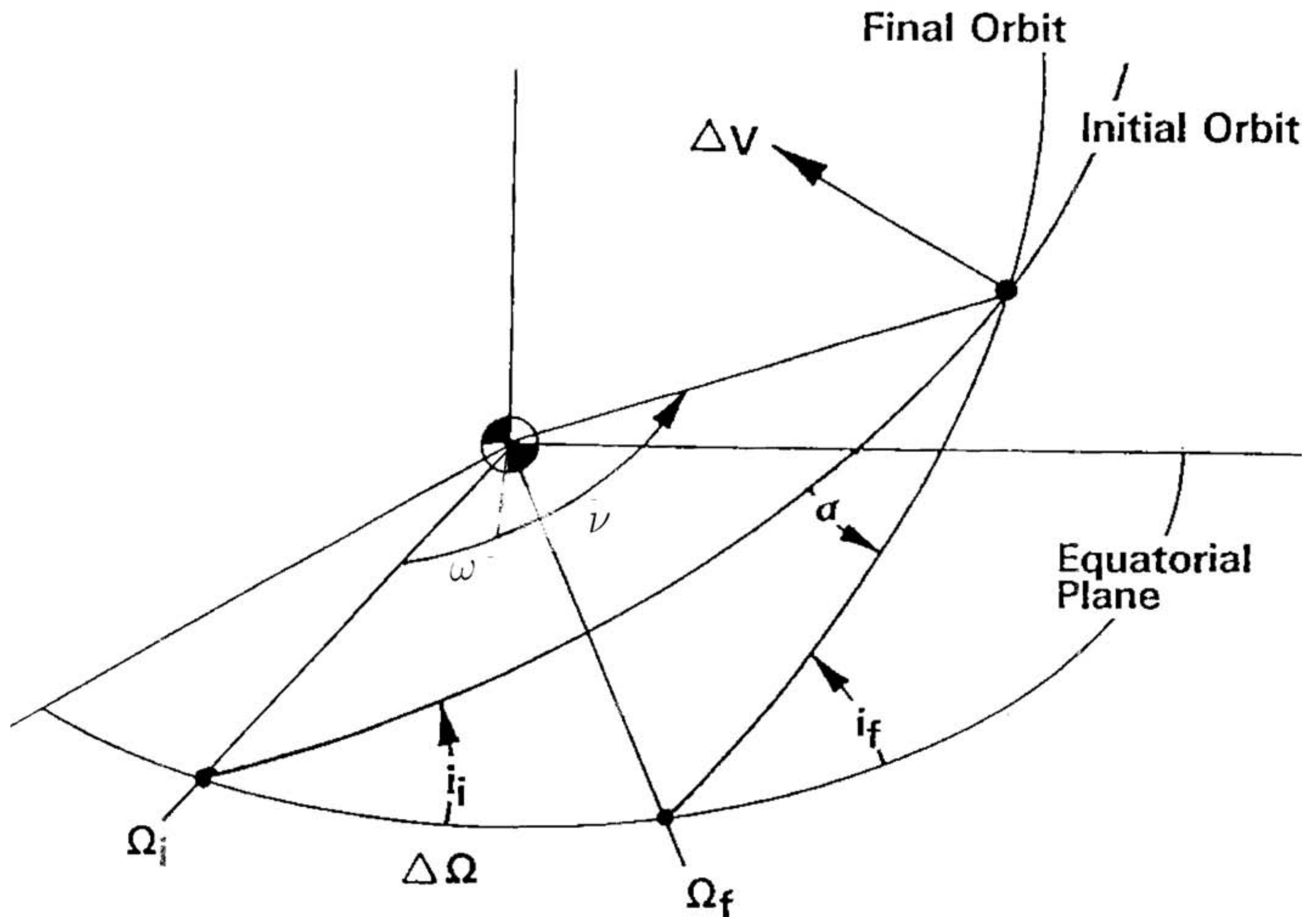


Figure 3.7: Manovra con correzione d'inclinazione generale.

La fig. 3.7 illustra la situazione più generale di manovra di cambio di inclinazione orbitale, in cui a partire da un'orbita iniziale con inclinazione i_i e longitudine del nodo ascendente Ω_i si vuole raggiungere un'orbita finale con inclinazione i_f e longitudine del nodo ascendente Ω_f. Sia α l'angolo formato dalle tangenti alle orbite iniziale e finale nel loro punto d'interesezione indicato in figura (dove quindi andrà applicato l'impulso propulsivo per effettuare la correzione), il quale è determinato da relazioni di trigonometria sferica (vedi [1], appendice del cap. 3) come

$$\cos\alpha \;=\; \cos i_i \, \cos i_f \;+\; \sin i_i \, \sin i_f \, \cos\Delta\Omega \tag{3.46}$$

essendo $\Delta\Omega$ la variazione nella longitudine del nodo ascendente:

$$\Delta\Omega \;=\; \Omega_f \;-\; \Omega_i \tag{3.47}$$

Il Δv da applicare si può allora calcolare attraverso la (3.1), in questo caso scritta nel piano definito da velocità iniziale e finale, applicate nel punto di intersezione delle due orbite. Si vedi quindi che in questo caso l'impulso applicato modifica tanto l'inclinazione che la longitudine del nodo ascendente dell'orbita. La necessità di una manovra di questo genere può presentarsi per esempio nel caso di manovre di *rendez–vous*, oppure per consentire ad una sonda di intercettare altri corpi celesti.

Nel caso invece in cui non ci siano vincoli sulla localizzazione del punto ove applicare l'impulso propulsivo destinato alla correzione dell'inclinazione, conviene che questo sia applicato in corrispondenza della linea dei nodi (ossia al nodo ascendente, oppure al nodo discendente, che risultano in comune tra l'orbita iniziale e finale). Questa situazione è esemplificata in fig. 3.8, che indica i vettori velocità iniziali e finali (l'angolo tra i quali è indicato come Δi), ed il relativo Δv richiesto. Si trova facilmente, applicando il teorema dei seni, che questo vale

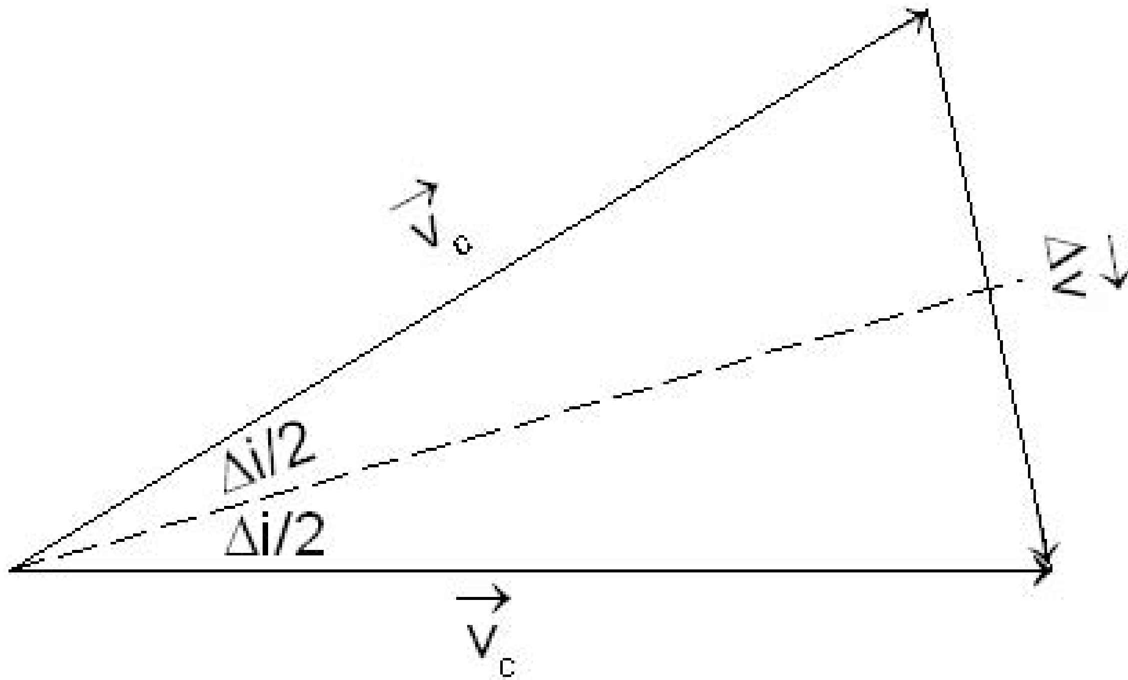


Figure 3.8: Manovra di correzione dell'inclinazione (effettuata in corrispondenza ad un nodo).

$$\Delta v \; = \; 2\, v \, \sin \frac{\Delta i}{2} \tag{3.48}$$

Questo Δv può risultare alquanto elevato. Per esempio, consideriamo un'orbita di altezza 200 km (quindi velocità di orbitazione circolare 7784 m/s) conseguita a partire dalla base di Cape Canaveral, per cui la sua inclinazione non può essere inferiore a 28,5°; volendo portare l'orbita sul piano equatoriale, si trova dalla (3.48) un Δv di 3832 m/s, e questo pur rimanendo invariato il modulo del vettore velocità. L'unico modo per contenere questi Δv è quello di limitare il Δi richiesto, il che comporta l'utilizzo di una base di lancio quanto più prossima possibile all'equatore. Inoltre, nel caso di orbite ellittiche, conviene applicare la correzione di inclinazione all'apogeo, ove la velocità che compare nella (3.48) è minima.

Nel caso in cui, oltre ad una manovra di correzione, debba essere effettuata anche una manovra che comporta una variazione del modulo della velocità (per esempio, nel caso di un trasferimento alla Hohmann, una tra le manovre che abbiamo designato come manovra di perigeo (3.8) o manovra di apogeo (3.9)), conviene effettuare una *manovra combinata*, ossia applicare un Δv che è la somma vettoriale dei Δv richiesti dalle singole manovre.

Come si può vedere dalla fig. 3.9, il Δv risultante è in modulo senz'altro minore della somma dei moduli necessari per correggere l'inclinazione, e per passare dal valore della velocità iniziale v_i al valore finale v_f, in quanto in un triangolo un lato è sempre più corto della somma degli altri due lati.

Una tipica situazione in cui è opportuno adottare una manovra combinata è in un trasferimento alla Hohmann da una LEO con $i \neq 0$ ad una GEO. In questo caso occorre dare una correzione di velocità al perigeo per l'iniezione nella semiellisse di trasferimento, una all'apogeo per circolarizzare l'orbita, ed una ancora per correggere l'inclinazione. Per quanto detto a proposito della (3.48), conviene effettuare quest'ultima correzione ove la velocità è minima, cioè all'apogeo, per cui conviene effettuare una manovra di apogeo combinata di circolarizzazione e correzione dell'inclinazione.

In realtà un'analisi più accurata rivela che risulta conveniente effettuare una piccola parte, che indichiamo con Δi_p, della correzione di inclinazione nella manovra di perigeo, e la parte rimanente, $\Delta i - \Delta i_p$, nella manovra di apogeo. I Δv delle due manovre si ricavano quindi applicando il teorema del coseno di Carnot

$$\Delta v_1 \; = \; \sqrt{v_i^2 \, + \, v_{pt}^2 \, - \, 2\, v_i \, v_{pt} \, \cos \Delta i_p} \tag{3.49}$$

$$\Delta v_2 \; = \; \sqrt{v_f^2 \, + \, v_{at}^2 \, - \, 2\, v_f \, v_{at} \, \cos \left(\Delta i \, - \, \Delta i_p\right)} \tag{3.50}$$

Figure 3.9: Manovra combinata di correzione d'inclinazione e correzione della velocità (effettuata in corrispondenza ad un nodo).

Il Δv complessivo del trasferimento

$$\Delta v \;=\; \Delta v_1 \,+\, \Delta v_2 \tag{3.51}$$

è riportato in fig. 3.10 in funzione di Δi_p, per il caso di un trasferimento alla Hohmann tra una LEO conseguita tramite un lancio dalla base di Cape Canaveral (quindi $i = 28{,}5^o$) di raggio $r_i = 6667$ km, ed una GEO. Si può vedere come il Δv complessivo ha un minimo quando al perigeo si effetta una manovra combinata di iniezione nell'orbita ellittica di trasferimento e correzione d'inclinazione di 2,2°; la manovra di apogeo consterà quindi della combinazione della circolarizzazione e della correzione d'inclinazione dei rimanenti 26,3°.

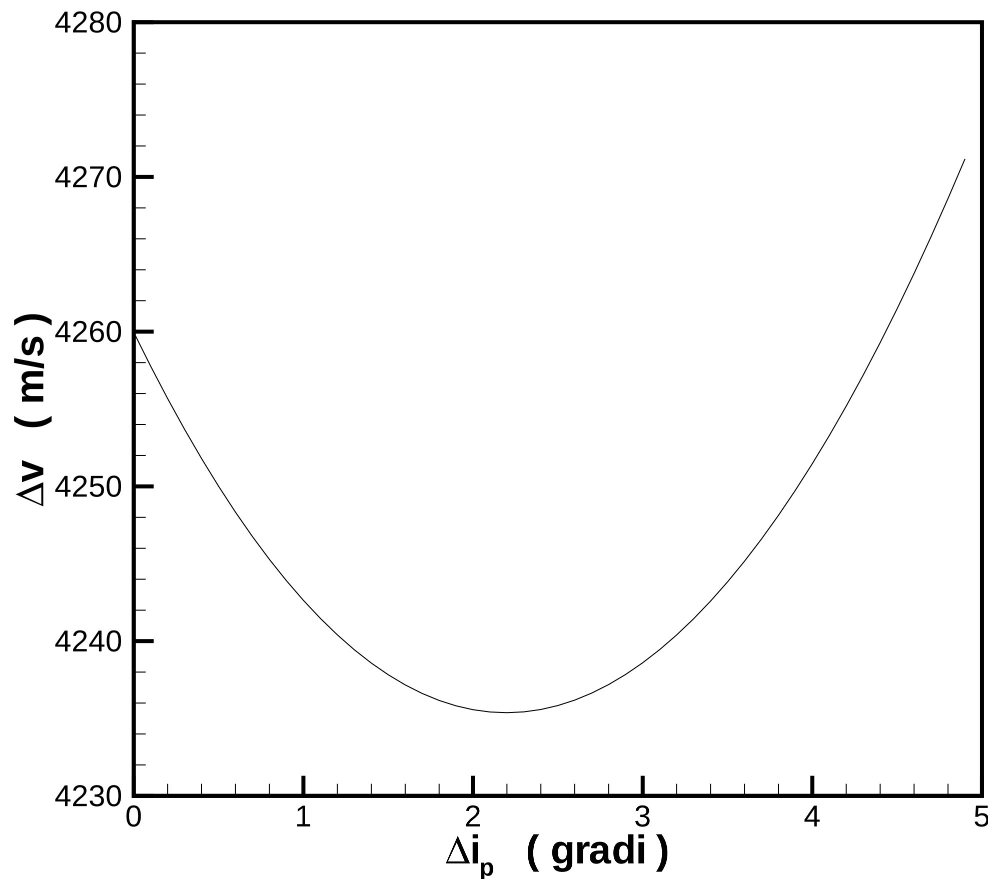


Figure 3.10: Δv complessivo per trasferimento alla Hohmann tra un'orbita LEO con $r_i = 6667$ km ed un'orbita GEO, con correzione d'inclinazione complessiva di 28,5°, in funzione della correzione d'inclinazione apportata nella manovra di perigeo.

3.2.1 Peso delle perturbazioni agenti su un satellite

La fig. 3.11 riporta l'accelerazione (espressa in g) dovuta alle varie componenti delle forze agenti su un satellite terrestre, in funzione della altezza dell'orbita (supposta circolare).

In particolare, l'accelerazione di gravità terrestre è scissa in due componenti, una (principale) che si avrebbe se la Terra fosse sferica e di densità omogenea, e l'altra (secondaria, designata come J2, vedi [1], par. 4.6.2) dovuta alla non sfericità della Terra stessa. La prima componente vale ovviamente uno (in g) alla superficie terrestre, e descresce con la quota (essendo proporzionale all'inverso del quadrato

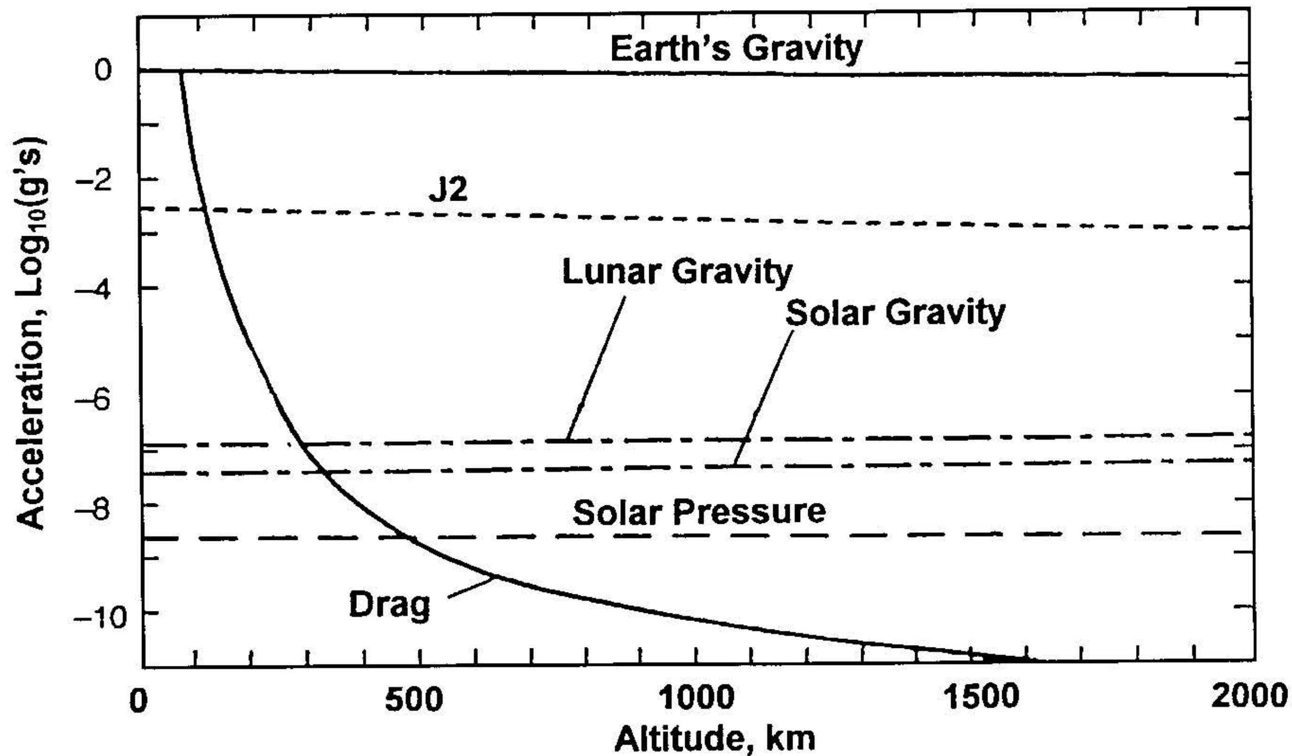


Figure 3.11: Fattori di accelerazione (in g, su scala logaritmica) relativi alle diverse forze agenti su un satellite, in funzione dell'altezza dell'orbita.

della distanza dal centro della Terra); la componente J2 è di circa due ordini e mezzo più debole alla superficie terrestre, e decresce anch'essa con la quota. L'accelerazione dovuta alla resistenza aerodinamica nell'alta atmosfera decresce fortemente con la quota per la progressiva rarefazione dell'atmosfera stessa; per quote estremamente basse, sotto i 100 km, essa è addirittura comparabile con la gravità (il che vuol dire che il satellite rientrerà in tempi brevissimi), mentre sopra i 500 km di quota è già la più debole fra tutte le perturbazioni considerate. Ovviamente, il dato riportato è indicativo, in quanto dipende in realtà dalla forma del satellite, o meglio dal suo coefficiente balistico C_B, vedi par. 6.1. Le accelerazioni indotte dall'attrazione della Luna sono circa sette ordini di grandezza più deboli della gravità terrestre, e quelle indotte dal Sole ancora minori. Il peso di entrambe aumenta molto lievemente all'aumentare della quota (perché il satellite si avvicina in qualche misura alla Luna e al Sole). La radiazione solare esercita poi una pressione

$$p_{rad} = \frac{S}{\hat{c}} \tag{3.52}$$

dove S è la potenza ricevuta da una superfice unitaria, ortogonale ai raggi del Sole (la quale vale circa 1350 W/m^2 al difuori dell'atmosfera, alla distanza media tra Terra e Sole), e $\hat{c} = 299792{,}5$ km/s è la velocità della luce nel vuoto, per cui p_{rad} vale circa 4,5 μPa. L'accelerazione ad essa dovuta (che dipende anche dall'area delle superfici del satellite e dal loro orientamento rispetto al Sole, nonché dalla loro riflettività) è ancora inferiore a quella indotta dalla gravità solare.

Vogliamo infine dare un'idea dei requisiti propulsivi per mantenere un satellite in posizione su una GEO, cioè per evitare che l'orbita per effetto delle perturbazioni fuoriesca dal piano equatoriale (cosidetta correzione N–S) e che il satellite si sposti lungo l'orbita rispetto alla superficie terrestre per effetto del *drift* (cosidetta correzione E–W). Per la correzione N–S, che per quanto detto va applicata i nodi, è necessario fornire circa

$$\Delta v_{N-S} \sim 50 \, \frac{\text{m/s}}{\text{a}} \tag{3.53}$$

ossia circa 50 m/s per ogni anno di vita operativa del satellite, mentre per la correzione E–W i requisiti sono alquanto inferiori

$$\Delta v_{E-W} \sim 10 \, \frac{\text{m/s}}{\text{a}} \tag{3.54}$$

o anche meno. Per ottenere il Δv complessivamente richiesto al sistema propulsivo del satellite per lo *stationkeeping* (cioè per tenere quest'ultimo in posizione) occorre poi moltiplicare per la durata operativa del satellite espressa in anni. Questo Δv viene comunque somministrato in numerosi piccoli impulsi distribuiti su tutto l'arco della vita operativa del satellite, attraverso brevi accensioni, durante il quale il motore non fa in tempo a raggiungere le condizioni di funzionamento stazionario. Quest'ultimo fattore comporta una perdita di velocità efficace d'uscita, la quale può ridursi anche fino al 50% rispetto al valore ottenuto in funzionamento stazionario, con conseguente aumento della massa di propellente da stivare a bordo.

3.3 Manovre a tempo di spinta finito

Mentre la trattazione sviluppata sin qui fa riferimento a manovre impulsive, vogliamo in questo paragrafo trattare invece gli effetti dovuti al fatto che in realtà la spinta viene applicata per un intervallo di tempo finito. Questo comporta l'insorgere di diversi tipi di perdite, in particolare

- perdite gravitazionali, la cui espressione è riportata in (2.26), in quanto l'angolo di volo γ non può essere tenuto a zero per tutta la durata della spinta, a differenza di quanto avviene ipotizzando una manovra impulsiva;

- perdite per disallineamento, la cui espressione è riportata in (2.29), in quanto per esigenze di guida durante tutto il periodo di spinta, a meno che non si adotti una strategia di spinta tangenziale – vedi sotto – sussisterà in generale un angolo ϵ tra la direzione della spinta e la direzione della velocità assoluta;

- eventualmente, perdite per *steering*, la cui espressione è riportata in (2.30), nel caso sia adottato un sistema del tipo di quelli descritti nel par. 2.2.1 per controllare la direzione della spinta. Va comunque detto che per sistemi propulsivi di satelliti la complessità di un sistema di *gimbal* non è in genere giustificata, e si ricorre per il controllo della direzione della spinta ad un ACS (*Attitude Control System*), vedi per esempio ultimo pannello della fig. 2.6. In questo caso quindi non si hanno perdite per *steering*, ma si ha comunque un impegno dello ACS (in altre parole, le perdite sono contabilizzate in una diversa voce, concernente appunto il sistema ACS).

In ogni caso, le perdite Δv_{losses} dovute ai tempi di spinta finiti dipendono anche dai seguenti fattori:

- ◦ dal valore del tempo di spinta ossia, per endoreattori di tipo chimico, del tempo di combustione t_b (*burning time*), o equivalentemente dell'accelerazione iniziale a_0 alla quale è sottoposto il veicolo (evidentemente, fissato il Δv da conseguire, lunghi tempi di spinta implicano valori della spinta F bassi, quindi basse accelerazioni, e viceversa, vedi anche successiva fig. 3.20);

- ◦ dal valore della velocità efficace d'uscita c fornita dal sistema propulsivo; infatti, data la massa iniziale m_0 e fissata l'accelerazione *iniziale* a_0 (quindi assegnata la spinta $F = m_0\, a_0$), l'accelerazione $a(t)$ durante il tempo di spinta dipende da come la massa $m(t)$ del veicolo diminuisce nel tempo per effetto del consumo di propellenti $\dot{m} = F/c$;

- ◦ dalla cosidetta *strategia di spinta* adottata, ossia dalla legge seconda la quale viene diretto il vettore spinta durante tutta la fase propulsa. Le opzioni più significative a questo riguardo sono le seguenti:

- *tangenziale*, in cui cioè il vettore spinta è tenuto costantemente orientato secondo la direzione della velocità assoluta, per cui l'angolo ϵ risulta costantemente nullo, e non si hanno perdite per disallineamento. Tuttavia, come risulterà più chiaro dall'esempio che segue, questo comporta che si ha certamente $\gamma \neq 0$, per cui si avranno perdite gravitazionali. Ancorché questa strategia di spinta possa sembrare la più ovvia, essa non è sempre adottata perché richiede un sistema di monitoraggio della velocità e controllo dell'assetto piuttosto impegnativo, in quanto occorre rilevare in ogni istante le tre componenti della velocità, ed orientare l'asse del veicolo (supposto coincidente con l'asse di spinta del motore) secondo la risultante, tramite l'ACS;
- *circonferenziale*, in cui il vettore spinta è sempre diretto secondo la direzione circonferenziale, ossia secondo la direzione dell'orizzontale locale. In questo caso sicuramente si avrà $\epsilon \neq 0$, quindi perdite per disallineamento, ma l'angolo di volo γ risulta più piccolo, con conseguenti minori perdite gravitazionali. Inoltre, la direzione della spinta può essere determinata sulla base della conoscenza della sola posizione del veicolo (più facile da determinare rispetto alla velocità, richiesta invece dalla strategia di spinta tangenziale);
- *inertially fixed*, cioè a direzione della spinta costante durante tutta la fase propulsa, per cui non è necessario operare alcuna operazione di monitoraggio della posizione/velocità, né di controllo dell'assetto (per cui non è richiesto un ACS attivo durante la fase propulsa, anche se in qualche modo il veicolo andrà orientato prima dell'accensione del motore nella direzione prescelta). Necessariamente si hanno rilevanti perdite, essendo gli angoli ϵ e γ grandi. Questa soluzione é tipicamente impiegata quando si usano endoreattori a propellenti solidi, per motivi che saranno chiariti dall'esempio che segue;
- *constant turning rate*, cioè a velocità angolare di rotazione $\dot{\alpha}$ (attorno ad un asse – di beccheggio – perpendicolare alla direzione della spinta) costante. Questa può essere conseguita fornendo al veicolo un piccolo impulso prima dell'accensione, che innesca la rotazione, dopodiché non è più necessaria alcuna successiva operazione di controllo d'assetto, in quanto il veicolo continua a ruotare con la velocità angolare assegnata[8]. Questa strategia quindi non richiede un ACS (se non per impartire la velocità di rotazione iniziale) né un sistema di monitoraggio di posizione/velocità, e permette di conseguire valori degli angoli ϵ e γ relativamente ridotti, con conseguenti ridotte perdite per disallineamento e gravitazionali. In un certo senso, può essere vista come un'opzione intermedia tra le prime due citate sopra (che richiedono un notevole impegno di ACS) e la terza (che non ne richiede alcuno durante la fase propulsa).

[8] In realtà bisognerebbe anche verificare come diminuiscono il momento angolare $I\,\dot{\alpha}$ ed il momento d'inerzia I del veicolo per effetto dell'espulsione dei propellenti, ma possiamo ritenere che, almeno in prima approssimazione, questi effetti risultino in una velocità angolare $\dot{\alpha}$ costante.

Per calcolare una manovra con tempo di spinta finito occorre evidentemente integrare il sistema delle equazioni del moto, del tipo (2.15,2.31), per tutta la durata della fase propulsa.

3.3.1 Esempio: iniezione in GTO

Consideriamo l'effetto dei tempi di spinta finiti sull'iniezione in GTO (orbita di trasferimento geostazionaria), a partire da una LEO di altezza 300 km, equatoriale (per cui in particolare non consideriamo correzioni d'inclinazione). Supponiamo di iniziare la fase propulsa al tempo $t = 0$, e di conoscere in ogni istante successivo t i valori della terna (r, v, γ), la cui evoluzione è descritta dal sistema (2.31). Risulta allora possibile determinare per ogni valore del tempo l'energia meccanica totale $\mathcal{E}$ (2.33) ed il momento angolare $\hat{h}$ (2.34), dai quali è possibile ricavare immediatamente il valore del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita osculatrice (vedi [1], par. 1.10)

$$a = -\frac{\mu}{2\,\mathcal{E}} \tag{3.55}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{\hat{h}^2}{\mu\, a}} \tag{3.56}$$

e quindi in particolare il raggio di apogeo di tale orbita

$$r_a = a\,(1 + e) \tag{3.57}$$

Possiamo quindi individuare l'istante in cui spegnere i motori attraverso la condizione che il raggio di apogeo dell'orbita osculatrice al tempo corrente eguagli il raggio della GEO

$$r_a = r_{GEO} \tag{3.58}$$

Ovviamente, a differenza di quanto avviene in una manovra impulsiva, allo spegnimento dei motori sarà in generale $r \neq r_{LEO}$, $\gamma \neq 0$, $v \neq v_{pt}$, $\nu \neq 0$, ossia il veicolo non si trova più sulla LEO, e comunque non viene necessariamente immesso nell'ellisse di trasferimento al perigeo di quest'ultima.

Se la manovra di immissione in GTO fosse impulsiva (manovra ideale), il Δv richiesto ammonterebbe a

$$\Delta v_{p,id} = 2426 \text{ m/s} \tag{3.59}$$

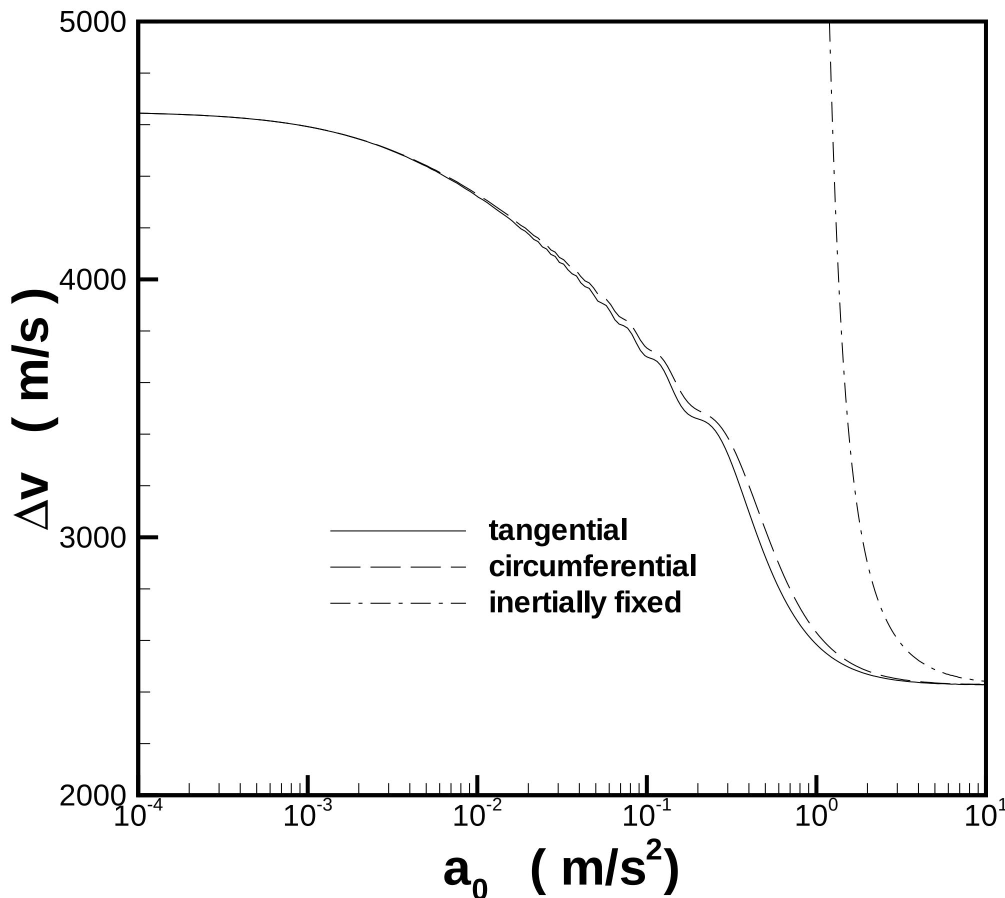


Figure 3.12: Δv per inserimento in GTO da orbita LEO con $h = 300$ km; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

come si può dedurre applicando la (3.8). Vogliamo ora vedere come il Δv richiesto da una manovra reale (cioè a tempo di spinta finito) si discosta dal valore ideale (3.59). Supponiamo che il sistema propulsivo fornisca una velocità efficace di uscita di 3000 m/s, come potrebbe essere il caso di un motore a propellenti *storable* (vedremo poi l'effetto di un diverso valore di c), e consideriamo tre diverse strategie di spinta: tangenziale, circonferenziale, *inertially fixed* (non consideriamo qui la strategia che abbiamo chiamato *constant turning rate* perché altrimenti dovremmo considerare anche l'effetto del valore della velocità angolare $\dot{\alpha}$ imposta, con conseguente proliferazione delle curve). La fig. 3.12 riporta il Δv richiesto dalla manovra reale, in funzione dell'accelerazione iniziale

a_0 (si noti la scala logaritmica delle ascisse). Si può notare che il Δv reale cresce costantemente al diminuire dell'accelerazione iniziale (cioè all'aumentare del tempo di spinta t_b). La strategia di spinta tangenziale, come ci si poteva aspettare, è quella che dà il minimo Δv, ma la strategia circonferenziale dà comunque un risultato appena superiore; la strategia *inertially fixed* dà invece un Δv sensibilmente superiore, a meno di non considerare accelerazioni iniziali di diversi m/s^2, ossia di avvicinare le condizioni di manovra impulsiva. Si può notare in effetti come, per valori di a_0 di questo ordine di grandezza, tutte le strategie considerate approssimino il dato ideale (3.59), com'è lecito aspettarsi per effetto dei brevi tempi di spinta, che tendono ad avvicinare la manovra ad una manovra ideale. Al diminuire dell'accelerazione iniziale, il Δv della manovra reale cresce, ed in particolare al disotto di $a_0 \simeq 0{,}2$ m/s^2 le curve relative alle strategie di spinta tangenziale e circonferenziale evidenziano una componente oscillatoria sovrapposta all'andamento citato. Tale andamento è dovuto al fatto che per tali valori di a_0 il tempo di spinta comincia a diventare comparabile con il periodo orbitale del satellite, con il risultato che il veicolo, oltre ad un passaggio in prossimità del perigeo al momento dell'accensione del motore, sarà ancora in fase di spinta al passaggio in prossimità dell'apogeo (dell'orbita osculatrice); in prossimità degli absidi, l'angolo di volo γ è prossimo a zero, e questo porta a perdite gravitazionali contenute, contrastando perciò l'andamento generale che indica un aumento del Δv al decrescere di a_0. Per specifici valori di a_0, si avranno più passaggi in prossimità del perigeo od apogeo dell'orbita osculatrice, con conseguenti perdite contenute, il che rende ragione dell'andamento oscillatorio riportato. Diminuendo ulteriormente a_0, il numero di passaggi in prossimità degli absidi diventa talmente elevato che il loro effetto positivo viene per così dire 'spalmato' sulla curva, e non risulta più rilevabile visivamente. Si può poi osservare come, per $a_0 \to 0$, le curve relative alle strategie di spinta tangenziale e circonferenziale tendano ad un valore limite asintotico, vedi anche il commento alla successiva fig. 3.22.

Resta da spiegare perché la strategia di spinta *inertially fixed* risulti tanto svantaggiosa rispetto alle altre. La motivazione può essere dedotta dalla fig. 3.13, che riporta una traiettoria di questo tipo per un'accelerazione iniziale $a_0 = 0{,}6$ m/s^2 (la Terra e l'orbita iniziale LEO sono a malapena distinguibili tra loro a causa della limitata altezza di quest'ultima, confrontata con il raggio terrestre). Si suppone che la fase propulsa inizi quando il veicolo si trova all'estremo destro in figura dell'orbita LEO, con direzione della spinta tangente alla traiettoria in tale punto (quindi verticale in figura, diretta verso l'alto). La traiettoria si sviluppa su circa 180°, ma si ricordi che la spinta è sempre diretta nella stessa direzione (verso l'alto), per cui verso la fase finale della traiettoria è diretta sostanzialmente in senso opposto al moto; si osservi inoltre che la parte finale della traiettoria è quella in cui (avendo supposto la spinta costante) si hanno le accelerazioni, e quindi le variazioni di velocità, più elevate in quanto la massa del veicolo si è fortemente ridotta essendo i serbatoi di propellente ormai quasi vuoti. Nel caso in figura, il veicolo si immette infine in una GTO che viene descritta in senso opposto rispetto alla LEO di partenza, chiaramente la peggiore soluzione possibile. Possiamo dire in generale

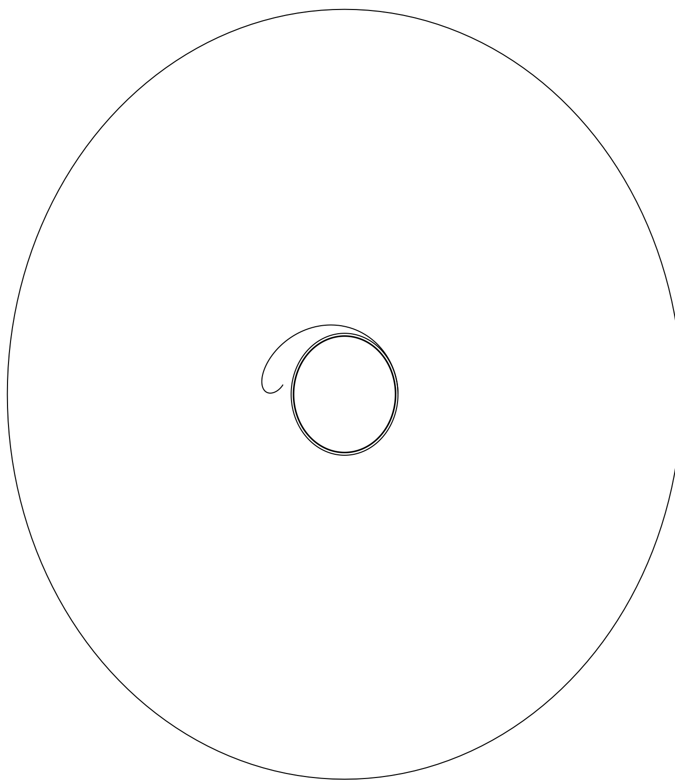


Figure 3.13: Traiettoria per inserimento in GTO da orbita LEO con h = 300 km, mediante strategia di spinta *inertially fixed*, con accelerazione iniziale 0,6 m/s^2; $\Delta i = 0$, c = 3000 m/s.

che per accelerazioni iniziali relativamente basse (indicativamente sotto un m/s^2) la traiettoria di un veicolo che segue una strategia di spinta del tipo considerato in un certo senso ‘impazzisce’. La strategia di spinta *inertially fixed* è quindi applicabile solo per accelerazioni relativamente alte, come è il caso quando si usano endoreattori a propellenti solidi, il cui tempo di combustione è limitato (per aumentarlo occorrebbe diminuire la spinta quindi la pressione in camera, che però potrebbe facilmente andare al disotto del cosidetto ‘limite di estinzione’ in corrispondenza al quale si ha lo spegnimento del grano; considerazioni di scambio termico possono anche indurre a contenere il tempo di combustione).

Tornando alla fig. 3.12, osserviamo come tutte le strategie di spinte considerate comportino perdite

rispetto al caso ideale di manovra impulsiva (3.59), che possiamo quindi esprimere come

$$\Delta v_{losses} \;=\; \Delta v \;-\; \Delta v_{p,id} \tag{3.60}$$

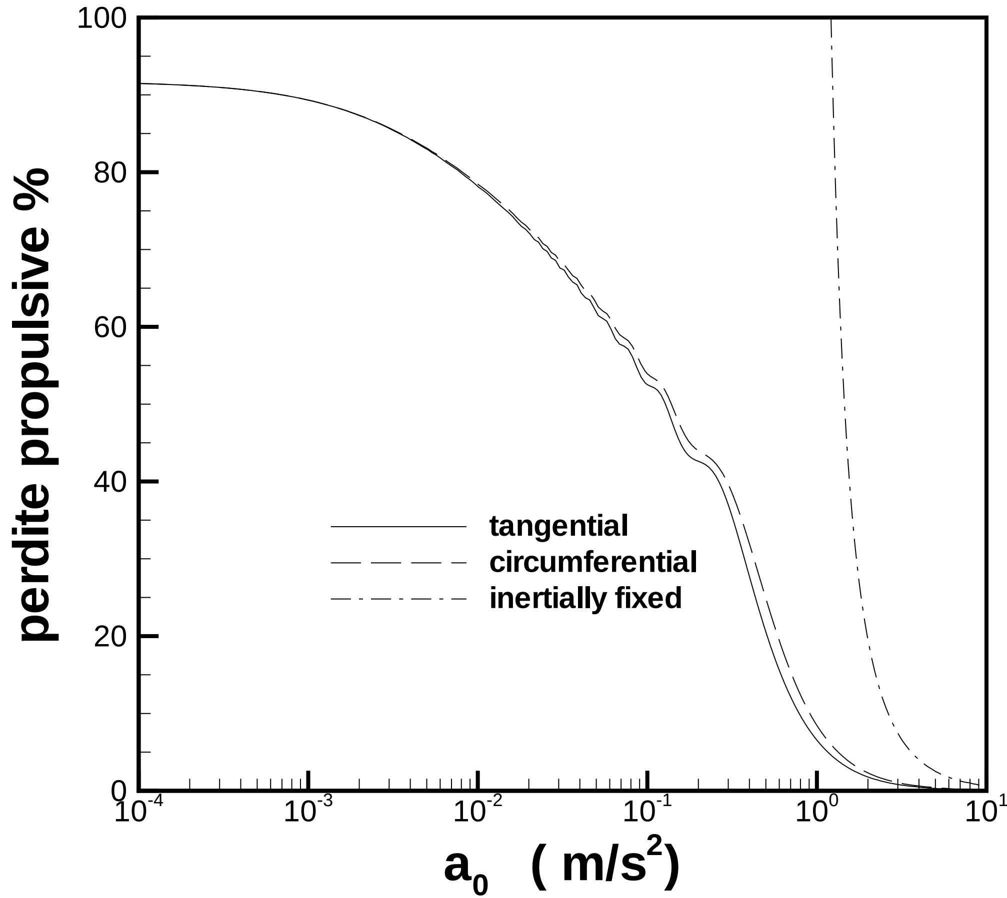


Figure 3.14: Perdite propulsive percentuali per inserimento in GTO da orbita LEO con $h = 300$ km; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

avendo indicato con $\Delta v = -c \log MR$ quella che abbiamo chiamato variazione di velocità efficace. Volendo queste perdite possono essere espresse come percentuale del $\Delta v_{p,id}$, come riportato in fig. 3.14; la figura è ovviamente uguale alla fig. 3.12, ma con asse delle ordinate 'riscalato'. Essa mostra comunque che per accelerazioni iniziali molto basse le perdite tendono ad un asintoto che supera il 90% dell'incremento di velocità ideale. Per contenere queste perdite, diminuendo quindi la massa di propellente necessaria a tutto vantaggio della massa del carico utile, si possono evidentemente

adottare livelli di accelerazione iniziale più elevati, ossia motori che forniscono una spinta maggiore. Questa opzione presenta però l'inconveniente di far aumentare la massa del motore, ricavabile dalla (1.45) in base al valore del rapporto spinta/peso applicabile alla categoria di motori considerati. Quindi quella che bisogna minimizzare non è tanto la massa di propellente, ma la *somma* della massa del propellente e del motore; questa ottimizzazione porta ad identificare il livello di accelerazione iniziale più indicato.

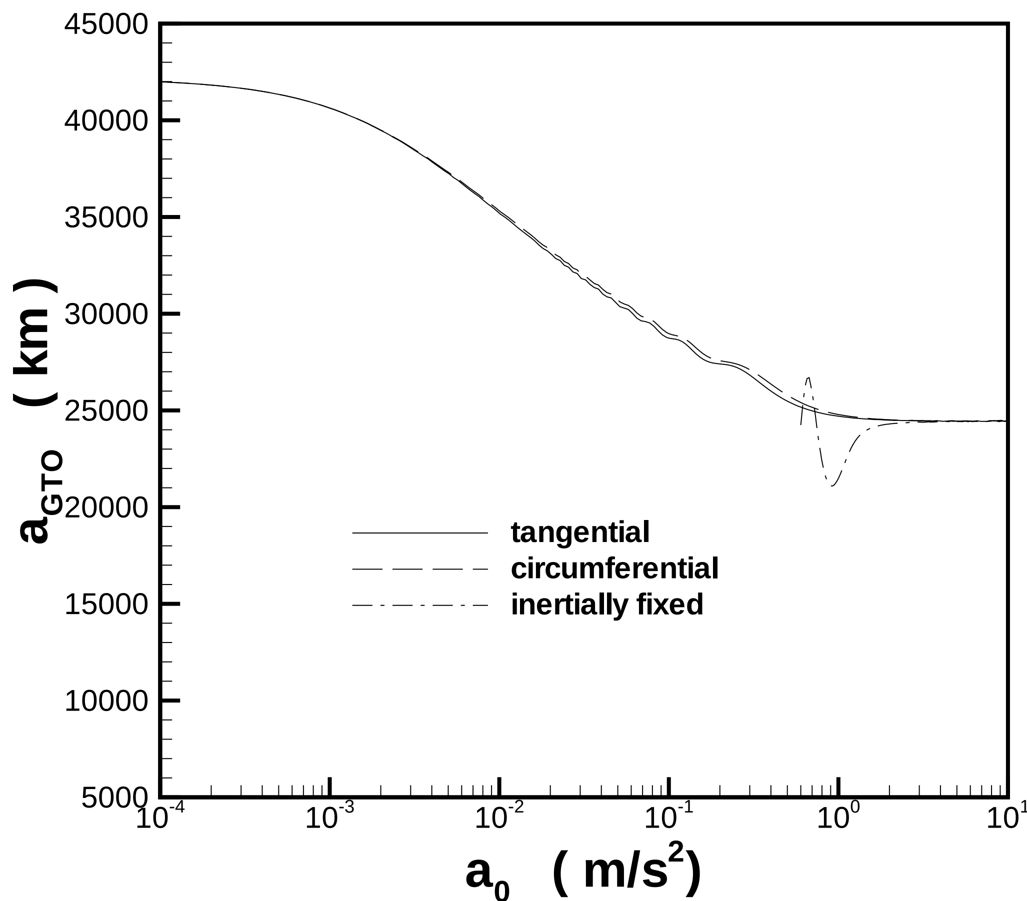


Figure 3.15: Semiasse maggiore della GTO conseguita da orbita LEO con $h = 300$ km; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

Va detto però che la fig. 3.14, che indica rilevanti perdite per propulsori che danno una bassa accelerazione iniziale (cosidetti propulsori *a bassa spinta*), non rende completamente giustizia a quest'ultimi. Infatti, se da una parte è vero che il Δv per l'iniezione in GTO aumenta sensibilmente per basse

a_0, bisogna anche considerare che per propulsori a bassa spinta l'iniezione in orbita (che idealmente, per manovra impulsiva, avviene alla quota della LEO stessa) avviene ad una quota sensibilmente superiore (in generale, vedi anche oltre) a quella della LEO, con la conseguenza che il semiasse maggiore della GTO è superiore al valore (3.5) determinato per trasferimento impulsivo, vedi fig. 3.15. Essendo il semiasse maggiore più grande, sarà anche maggiore l'energia meccanica totale (2.33), e di conseguenza più elevata la velocità all'apogeo della GTO, per cui il Δv_a da dare all'apogeo sarà minore del valore relativo alla manovra impulsiva ideale, che indichiamo come $\Delta v_{a,id}$, il quale per il caso in questione risulta, vedi (3.9)

$$\Delta v_{a,id} \;=\; 1467 \;\; \text{m/s} \tag{3.61}$$

Si possono allora ridefinire le perdite sottraendo al secondo membro della (3.60) la riduzione del Δv_a:

$$\Delta v_{losses} \;=\; \Delta v \;-\; \Delta v_{p,id} \;-\; (\Delta v_{a,id} \;-\; \Delta v_a) \tag{3.62}$$

ed eventualmente esprimerle come percentuale del Δv obiettivo, che possiamo definire come

$$\Delta v_{p,id} \;-\; (\Delta v_{a,id} \;-\; \Delta v_a) \tag{3.63}$$

ottenendo in tal modo l'andamento riportato in fig. 3.16. Si vede che, con questo criterio, le perdite sono molto inferiori a quanto riportato in fig. 3.14. Tale curva, che tiene quindi conto degli effetti del tempo di spinta finito anche sul Δv da fornire nella manovra di apogeo, mostra un andamento non monotono per strategie di spinta tangenziale e circonferenziale, poiché il protrarsi della fase di spinta porta a contenere le perdite gravitazionali in quanto l'accelerazione di gravità si riduce con r.

La fig. 3.17 mostra come il raggio al momento dell'iniezione in GTO cresca al diminuire dell'accelerazione iniziale, anche se la strategia di spinta *inertially fixed* mostra al solito un andamento diciamo capriccioso per bassi valori di a_0.

La fig. 3.18 mostra inoltre come l'angolo di volo al momento dell'iniezione in GTO, che è nullo per la manovra ideale impulsiva, cresca fino a raggiungere un valore massimo di poco inferiore ai 30° (si osservi che tali valori sono comunque più bassi per strategia circonferenziale rispetto a quella tangenziale, il che implica minori perdite gravitazionali, come già osservato, anche se la strategia tangenziale dà in compenso perdite per disallineamento nulle), per poi ridiscendere tendendo a zero. Come sempre, la strategia *inertially fixed* mostra le sue peculiarità per basse accelerazioni.

La fig. 3.19 mostra l'eccentricità della GTO conseguita; si può osservare come essa si riduca costantemente al diminuire dell'accelerazione iniziale (con l'esclusione della strategia *inertially fixed*).

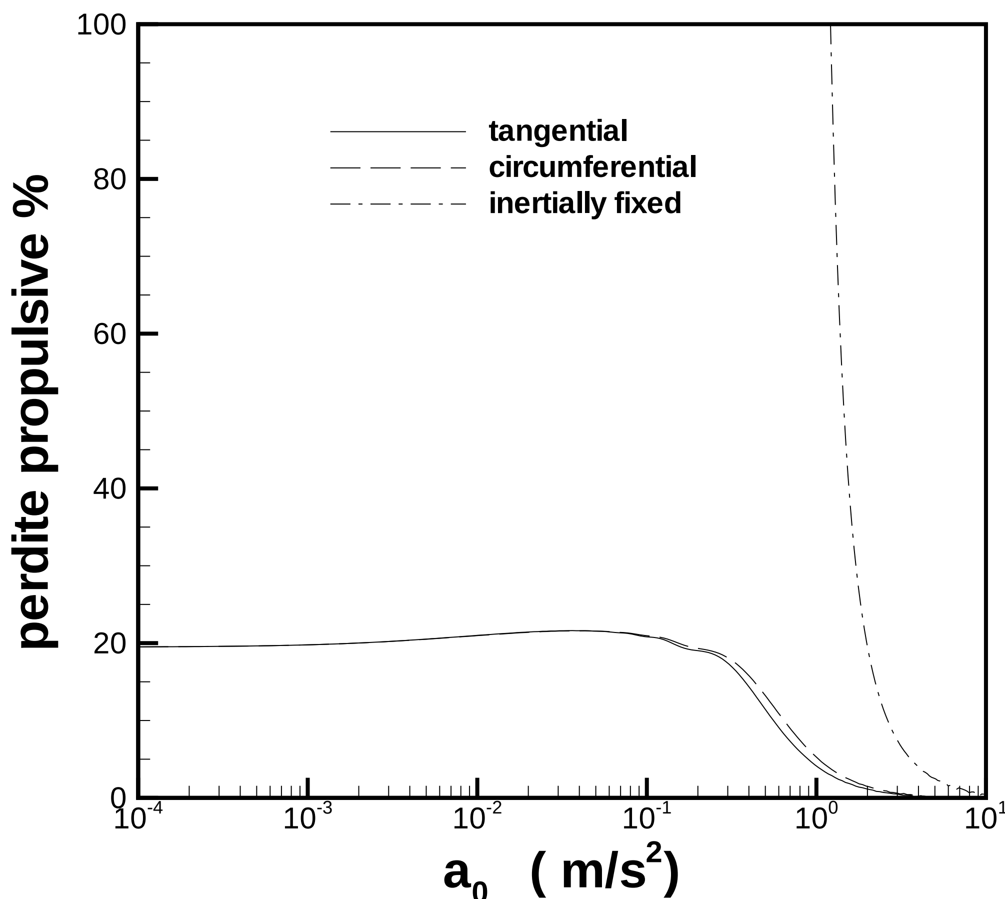


Figure 3.16: Perdite propulsive percentuali, riferite al Δv obiettivo definito dalla (3.63), per inserimento in GTO da orbita LEO con $h = 300$ km; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

La fig. 3.20 mostra come il tempo di spinta ovviamente cresca al diminuire dell'accelerazione iniziale (le curve relative a strategie di spinta tangenziale e circonferenziale sono indistinguibili).

La fig. 3.21 mostra come la traiettoria di trasferimento si modifica al ridursi dell'accelerazione iniziale. In ogni caso si assume che l'accensione avvenga all'estremo inferiore in figura della LEO; la traiettoria descritta nella fase propulsa è indicata a linea continua, quella nella successiva GTO a linea tratteggiata. È anche indicato il raggio vettore del punto in cui vengono spenti i motori, in cui cioè il veicolo è inserito nella GTO. Si può osservare che al ridursi di a_0 si allunga l'estensione dell'arco di traiettoria propulsa, mentre si riduce quello della GTO. Inoltre, l'iniezione *non* avviene al perigeo della GTO, come si può evincere osservando che il raggio vettore all'iniezione non è perpendicolare

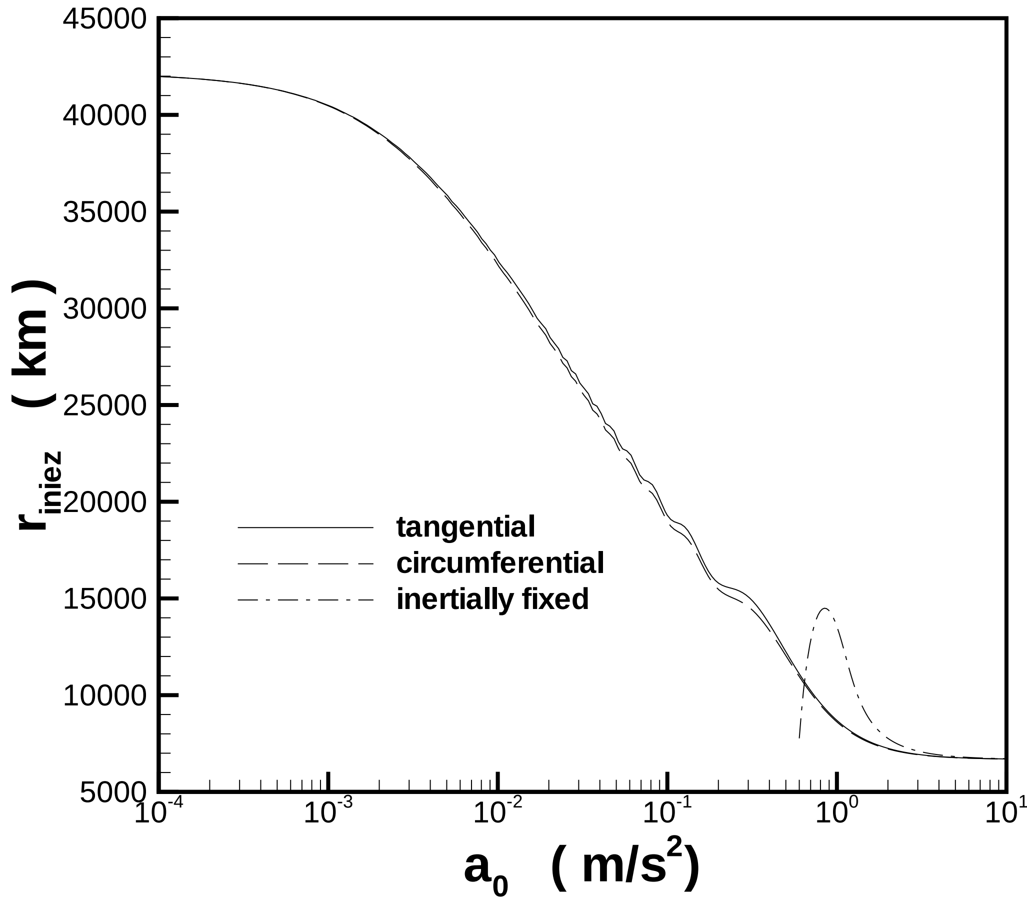


Figure 3.17: Raggio all'iniezione in GTO da orbita LEO con h = 300 km; Δi = 0, c = 3000 m/s.

alla traiettoria; di conseguenza, l'angolo descritto dal veicolo lungo la GTO spazza meno di 180°.

Le conseguenze estreme di quanto visto nelle figg. 3.15, 3.17, 3.18, 3.19, 3.21 sono riassunte nella fig. 3.22, che mostra la traiettoria descritta in un trasferimento ad accelerazione iniziale molto bassa, a_0 = 0,001 m/s^2. Essa assume la forma di una lunga spirale che si allarga gradualmente, per arrivare sin quasi alla GEO, con angolo di volo prossimo allo zero al termine della fase propulsa. L'arco di ellisse di trasferimento che il veicolo deve percorrere per arrivare alla GEO sarà molto breve, come pure sarà molto limitato il Δv_a da fornire all'apogeo di tale ellisse.

Abbiamo sin qui tenuta costante la velocità efficace d'uscita al valore c = 3000 m/s; vogliamo ora vedere qual'è l'effetto di variare c. La fig. 3.23 mostra che, a parità di accelerazione iniziale, una velocità efficace d'uscita più alta comporta un Δv per iniezione in GTO lievemente più elevato.

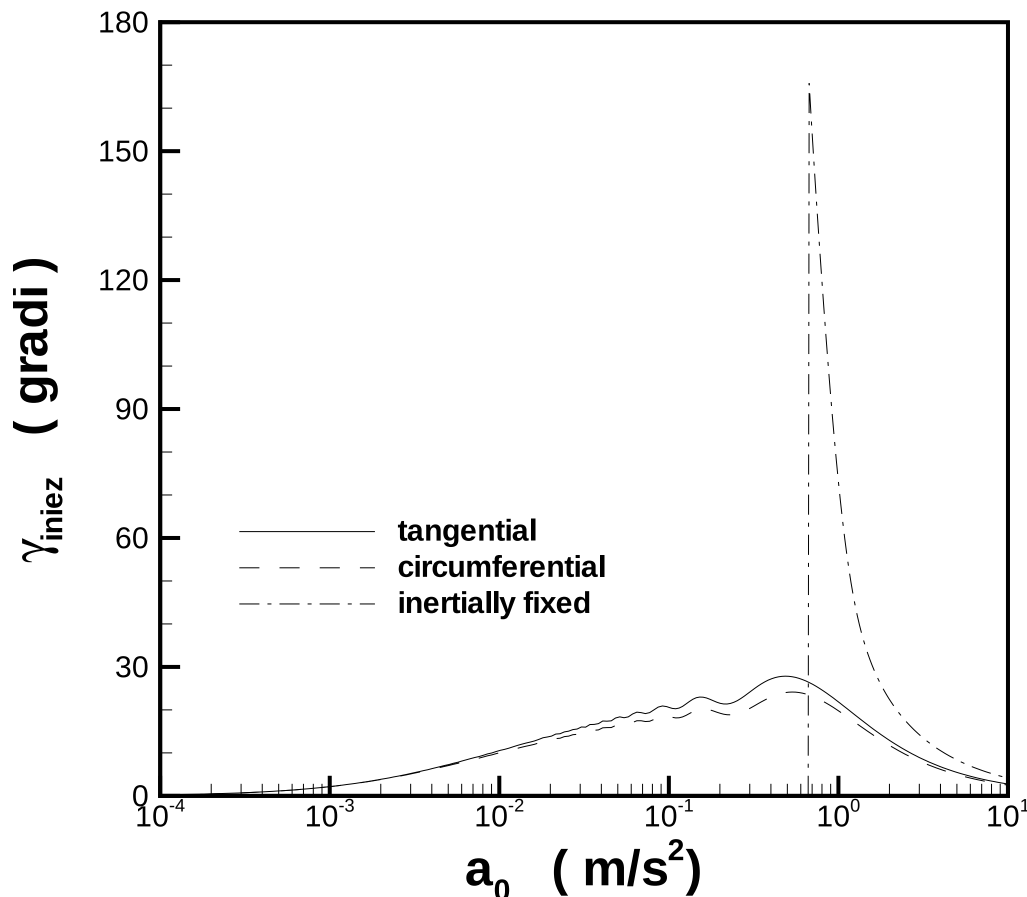


Figure 3.18: Angolo di volo all'inserimento in GTO da orbita LEO con h = 300 km; Δi = 0, c = 3000 m/s.

Questo perché una c più alta, a parita di a_0, quindi di F, comporta un consumo di propellenti $\dot{m} = F/c$ più basso, quindi una massa m del veicolo che decresce più lentamente con il tempo, perciò accelerazioni, al tempo generico, $a = F/m$ più basse. Quindi a parità di accelerazione iniziale a_0, si hanno accelerazioni più basse durante tutta la fase propulsa, con conseguenti perdite lievemente più elevate.

Un mezzo per ridurre le perdite propulsive, a parità di a_0, consiste nell'effettuare, anziché un'unica lunga fase propulsa, una serie di *accensioni multiple* in prossimità dei passaggi agli absidi (perigeo ed apogeo). In tali passaggi l'angolo di volo è prossimo allo zero per cui le perdite gravitazionali (2.26) sono molto contenute; se poi si adotta una strategia di spinta circonferenziale, anche le perdite per

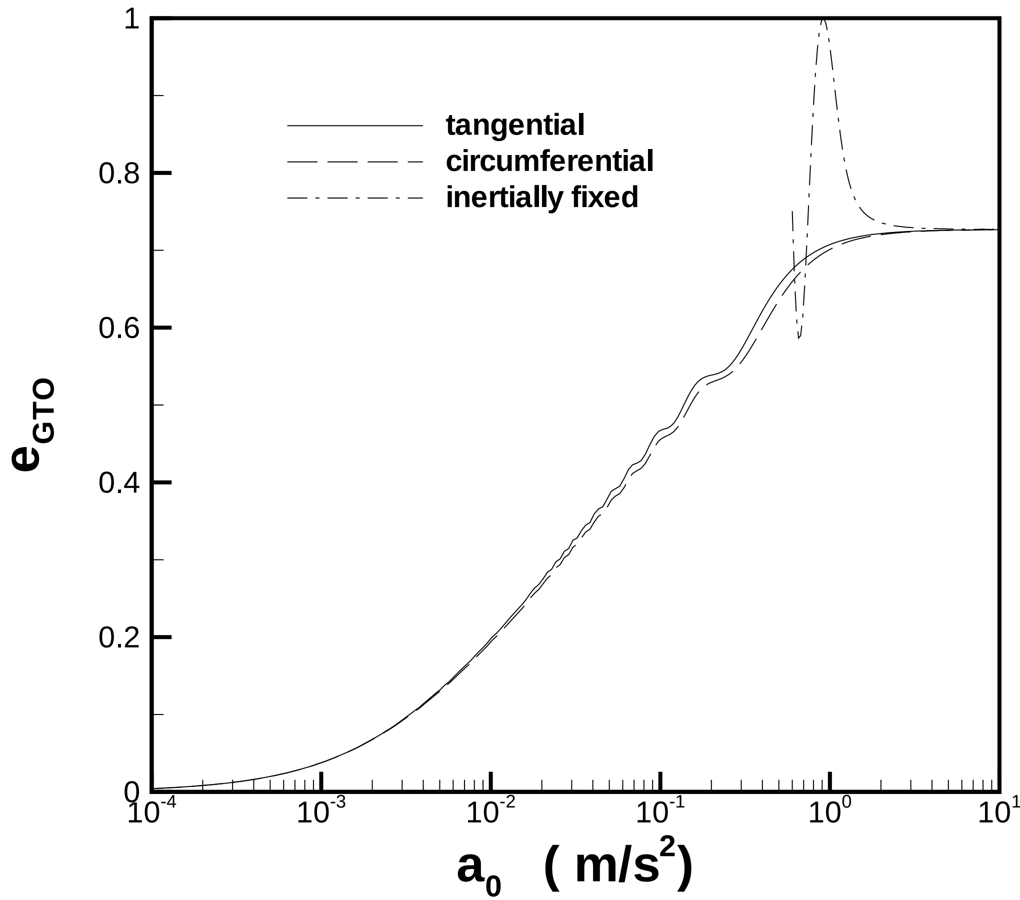


Figure 3.19: Eccentricità della GTO conseguita da orbita LEO con h = 300 km; $\Delta i = 0$, c = 3000 m/s.

disallineamento (2.29) sono ridotte perché nel passaggio agli absidi la velocità assume una direzione circonferenziale, riducendo quindi a zero l'angolo di disallineamento (ricordiamo che tali perdite sono comunque nulle per una strategia tangenziale).

Lo svantaggio di una manovra ad accensioni multiple è che è richiesto un sistema propulsivo riaccendibile, nel caso si operi con propellenti liquidi, oppure, se si adottano propellenti solidi, un sistema in più stadi, con conseguenti penalizzazioni in termini di complessità, affidabilità, costi.

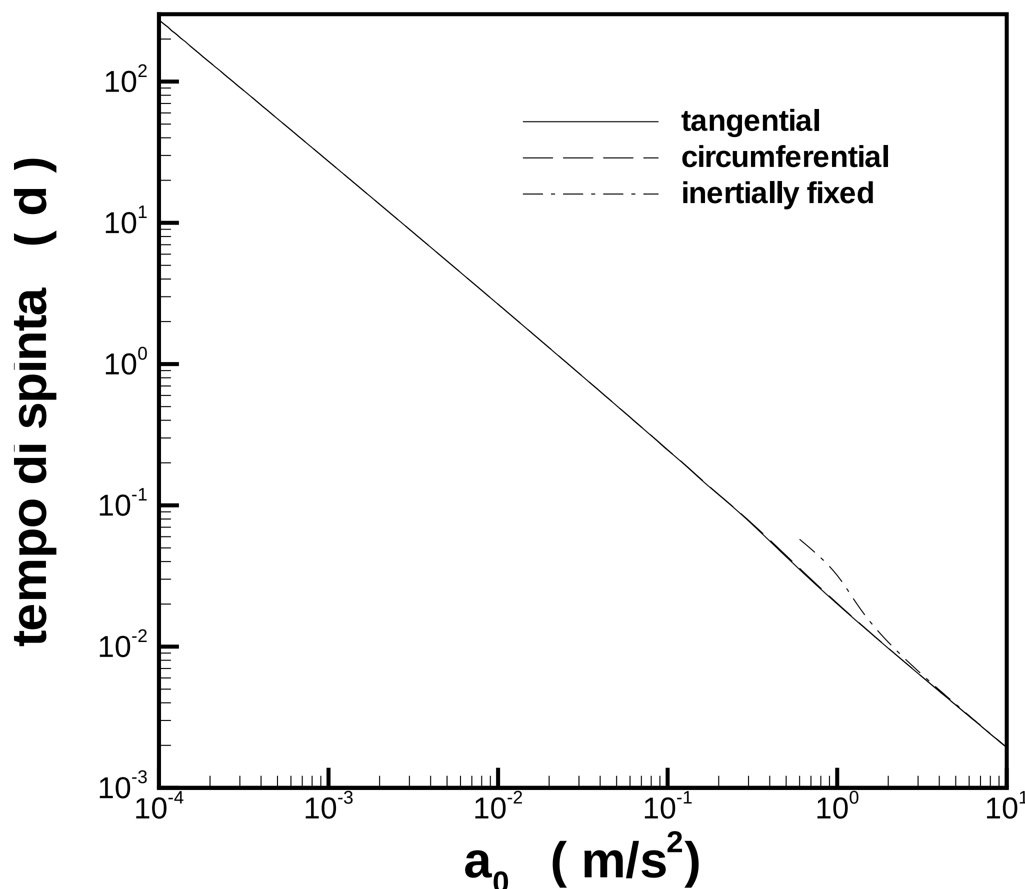


Figure 3.20: Tempo di spinta (in giorni) per inserimento in GTO da orbita LEO con h = 300 km; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

3.4 Propulsori elettrici

Un caso limite di manovra a bassa spinta si ha quando si adottano endoreattori elettrici, i quali danno velocità efficaci d'uscita molto elevate, ma richiedono una sorgente d'energia, tipicamente pannelli solari fotovoltaici, la cui massa è proporzionale alla potenza elettrica assorbita dal motore, la quale a sua volta determina la spinta F, quindi l'accelerazione. Per limitare la massa della fonte di energia, è necessario limitare l'accelerazione a valori molto bassi, con conseguenti lunghi tempi di trasferimento. Questi costituiscono una penalizzazione dal punto di vista economico, in quanto il satellite rimarrà non operativo per molti mesi, non producendo quindi introiti; si ha quindi una



Figure 3.21: Traiettoria per inserimento in GTO da orbita LEO con $h = 300$ km, per due diversi valori dell'accelerazione iniziale; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

perdita per *immobilizzo* del satellite. D'altra parte, va anche considerato che i pannelli solari, finito il trasferimento, possono essere utili per alimentare le apparecchiature di bordo, entrando in tal modo a far parte del carico utile.

I propulsori elettrici possono essere classificati in tre categorie:

1. elettrotermici, in cui una corrente elettrica è utilizzata per riscaldare, p. es. attraverso una resistenza, un gas che è fatto poi espandere attraverso un ugello, in modo analogo a quanto avviene per gli endoreattori chimici;

2. elettrostatici o a ioni , in cui la spinta è prodotta attraverso l'accelerazione di ioni in un campo elettrico;

3. elettromagnetici o a plasma, in cui un plasma è accelerato per l'azione di un campo magnetico su cariche in moto, quest'ultime dovute al passaggio di una corrente elettrica (motivo per cui si utilizza un plasma, cioè un gas portato a temperature tali da divenire elettricamente conduttivo).

I principali componenti di un sistema propulsivo elettrico sono un'unità di potenza (cioè una fonte di energia elettrica), un'unità di condizionamento della potenza (*Power Conditioning Unit* – PCU), che ha il compito di fornire l'energia elettrica nelle condizioni di tensione e frequenza opportune, un sistema di immagazzinamento ed alimentazione del propellente, un *thruster*, cioè l'organo che

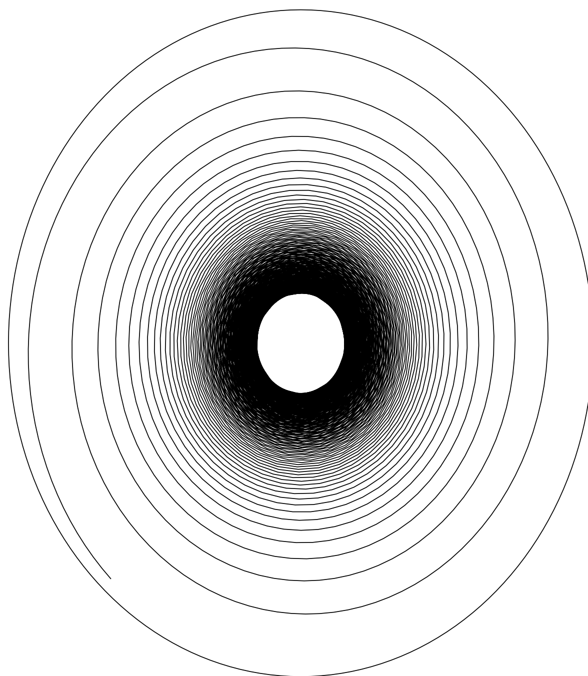


Figure 3.22: Traiettoria per inserimento in GTO da orbita LEO con $h = 300$ km, per accelerazione iniziale $a_0 = 0{,}001$ m/s^2; $\Delta i = 0$, $c = 3000$ m/s.

fornisce la spinta (e che differirà a seconda del tipo di propulsore), ed infine radiatori per disperdere l'energia non convertita ai fini propulsivi.

I propulsori elettrici sono come detto caratterizzati da un rapporto spinta/peso estremamente basso, e da velocità efficaci di uscita alte. Non possono quindi assolutamente essere usati per gli stadi di lanciatori, ma possono invece essere usati su satelliti già in orbita per correggere le perturbazioni orbitali, o per trasferimenti orbitali (tipicamente da orbita terrestre bassa a orbita geostazionaria equatoriale), oppure su sonde interplanetarie. A causa della bassa spinta si hanno però lunghi tempi di trasferimento orbitale con conseguenti penalità economiche (poiché il satellite resta indisponibile per tutto il tempo di trasferimento – molti mesi), e danni ai pannelli solari a causa della lunga permanenza nelle fasce di van Allen.

Per evidenziare le caratteristiche citate dei propulsori elettrici (alta velocità efficace d'uscita, bassissimo rapporto spinta/peso), prendiamo in considerazione in particolare i propulsori di tipo elettrostatico.

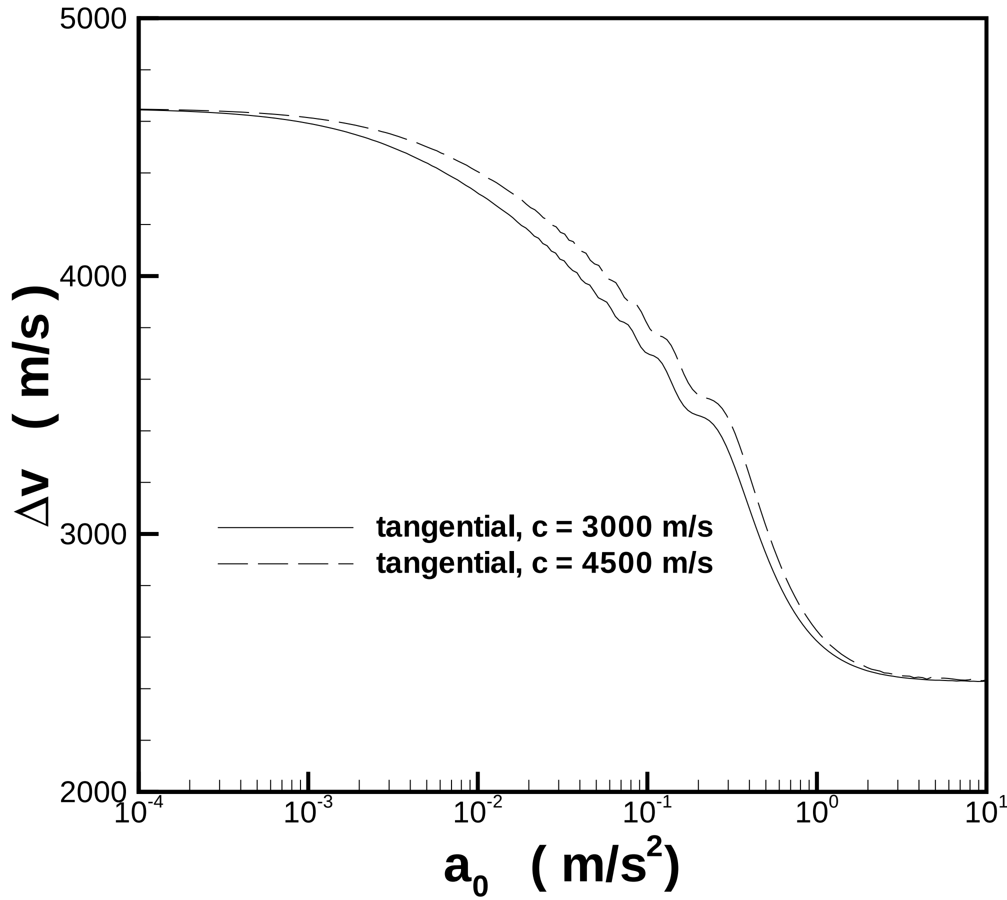


Figure 3.23: Δv per inserimento in GTO da orbita LEO con $h = 300$ km, per due diversi valori della velocità efficace d'uscita; $\Delta i = 0$, strategia di spinta tangenziale.

3.4.1 Propulsori elettrostatici

Nei propulsori elettrostatici, detti anche a ioni, le molecole del gas operativo (ionizzate) sono direttamente accelerate mediante un campo elettrico. Questi propulsori consentono in linea di principio di ottenere altissime velocità efficaci di uscita. Se indichiamo con μ la massa dello ione e con q la sua carica, l'eguaglianza tra l'energia potenziale elettrica e l'energia cinetica acquistata dallo ione in moto alla velocità v

$$q\,V \;=\; \frac{1}{2}\,\mu\,v^2 \tag{3.64}$$

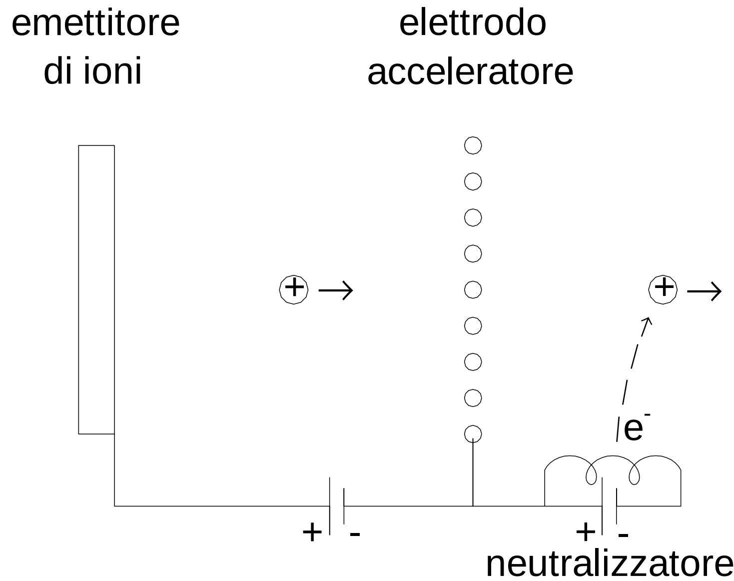


Figure 3.24: Schema di *thruster* elettrostatico.

dove V è la differenza di potenziale applicata, vedi fig. 3.24, permette di ricavare la velocità efficace di uscita (coincidente appunto con la velocità dello ione espulso dal motore, in quanto come vedremo il termine di spinta di pressione risulta trascurabile a causa della bassa pressione operativa)

$$c = v = \sqrt{\frac{2\,q\,V}{\mu}} \qquad (3.65)$$

Questa espressione evidenzia come questo propulsore possa in teoria dare valori estremamente elevati della velocità efficace di uscita, ricorrendo a differenze di potenziale V opportunamente elevate.

La corrente elettrica che fluisce attraverso il motore sarà data dal prodotto della carica per il numero di ioni che fluiscono nell'unità di tempo:

$$I = \frac{\dot{m}}{\mu}\,q \qquad (3.66)$$

La portata in massa di propellente può essere perciò espressa come

$$\dot{m} = \frac{\mu\,I}{q} \qquad (3.67)$$

ed infine la spinta risulta

$$F = \dot{m}\, c = I \sqrt{2\, V} \sqrt{\frac{\mu}{q}} \tag{3.68}$$

Deve essere considerato tuttavia che la presenza di ioni entro il *thruster* crea una carica spaziale la quale tende a limitare il valore della corrente I che compare nella (3.68) ad un valore di saturazione; si hanno allora basse spinte per unità di sezione del *thruster*, e quindi anche bassi rapporti spinta/peso. Per limitare la carica spaziale è necessario adottare pressioni di esercizio del *thruster* estremamente basse. All'uscita del *thruster* gli ioni sono neutralizzati con un flusso di elettroni, vedi fig. 3.24, per impedire che lo *spacecraft* assuma una carica elettrica (attirando così gli ioni, non neutralizzati, espulsi).

Si può notare che mentre dalla (3.65) si nota che comnviene utilizzare ioni a bassa rapporto massa/carica per avere elevare velocità efficaci di uscita, dalla (3.68) si evince invece che per avere spinta (relativamente) alte conviene adottare valori elevati di tale rapporto; in genere questa seconda esigenza prevale sulla prima. Come propellente, si è pensato quindi in passato al cesio (massa molare 133) perché esso richiede una bassa energia per la ionizzazione; tuttavia esso brucia in aria ed esplode in acqua, per cui i preparativi di lancio risultano più complessi e più costosi. Oggi si adotta invece lo xenon (massa molare 131,3), costoso (è presente nell'aria in proporzione di circa una parte su 11 000 000) ma inerte, per cui non dà problemi operativi.

Con i propulsori elettrostatici si raggiungono tipicamente rendimenti del 50 – 55%.

3.4.2 Ottimizzazione della velocità efficace di uscita

Nei propulsori chimici, il rapporto spinta/peso è molto alto, mentre la velocità efficace di uscita è relativamente bassa. Ne consegue che la massa del sistema propulsivo sarà in massima parte costituita dalla massa del propellente, e solo in piccola parte dal motore e strutture relative (in particolare i serbatoi). Quindi non c'è dubbio che per migliorare il rapporto di massa (rapporto tra massa finale e massa iniziale) di un endoreattore chimico bisogna puntare ad alte velocità efficaci di uscita.

La situazione è invece differente per i propulsori elettrici. La spinta è data, se $\dot{m}$ è la portata in massa di propellente, dalla

$$F = \dot{m}\, c \tag{3.69}$$

Il rendimento del propulsore, inteso come rapporto tra potenza del getto e potenza elettrica utilizzata, risulta perciò

$$\eta = \frac{P_{jet}}{P_e} = \frac{\frac{1}{2}\,\dot{m}\,c^2}{P_e} = \frac{F\,c}{2\,P_e} \tag{3.70}$$

La potenza elettrica richiesta per conseguire una data spinta ed una data velocità efficace di uscita può perciò essere espressa, una volta assegnato η, come

$$P_e = \frac{F\,c}{2\,\eta} \tag{3.71}$$

Come abbiamo detto, la massa del sistema propulsivo sarà costituita dalla massa di propellente m_p, dalla massa della sorgente di energia m_{ps}, dalla massa del motore, della PCU, e delle strutture relative. Nei propulsori elettrici, la componente preponderante della massa del motore è quella relativa alla fonte di energia, che indichiamo con il suffisso *ps* (per *power supply*); se introduciamo una sua potenza specifica α

$$\alpha = \frac{P_e}{m_{ps}} \tag{3.72}$$

cioè la potenza elettrica ottenibile per unità di massa della fonte di energia, possiamo allora determinare la massa della fonte di energia richiesta come

$$m_{ps} = \frac{F\,c}{2\,\alpha\,\eta} \tag{3.73}$$

In questa espressione α e η sono più o meno determinate dalla tecnologia disponibile, mentre F e c possono essere variate (entro certi limiti) a piacere; risulta perciò sostanzialmente

$$m_{ps} \propto F\,c \tag{3.74}$$

La spinta F può essere assunta bassa perché il sistema si trova già in orbita; però non si può scendere sotto certi limiti altrimenti i tempi di trasferimento diventano eccessivi. Ciò si traduce in un limite

per F oppure, equivalentemente, per il rapporto F/m_0, che ha il significato di un'accelerazione iniziale (dove m_0 è la massa iniziale del sistema – anche se quest'ultima approssimazione è molto larga, in quanto m_0 dipende ovviamente a sua volta dalla massa del sistema propulsivo); quindi possiamo dire che F è assegnato in base a queste considerazioni.

Allora, per ridurre la massa di propellente m_p necessaria per sviluppare la spinta richiesta F per il tempo t_b, data ovviamente da

$$m_p \; = \; \dot{m}\, t_b \tag{3.75}$$

si può cercare di innalzare la velocità efficace di uscita c, infatti

$$\dot{m} \; = \; \frac{F}{c} \tag{3.76}$$

Dalla (3.74) tuttavia si vede che, assegnata F, la massa della fonte di energia m_{ps} risulta proporzionale a c; quindi aumentando c, si riduce la massa di propellente ma si aumenta la massa del motore. La situazione è esemplificata dalla fig. 3.25, dalla quale si può anche vedere la velocità efficace di uscita che minimizza la massa iniziale per la missione considerata.

Ovviamente, il valore di c che garantisce la minima massa complessiva del sistema propulsivo dipende dalla missione considerata, cioè dal Δv richiesto. Per missioni che richiedono un alto Δv, in cui quindi la massa del propellente ha un'importanza maggiore rispetto alla massa del motore, converrà cercare di contenere la prima adottando valori di c piuttosto alti; per missioni a basso Δv vale ovviamente l'opposto. Si vede quindi che per i propulsori elettrici l'obiettivo non è semplicemente quello di massimizzare la velocità efficace di uscita, ma di determinare il valore di c che ottimizza globalmente la missione.

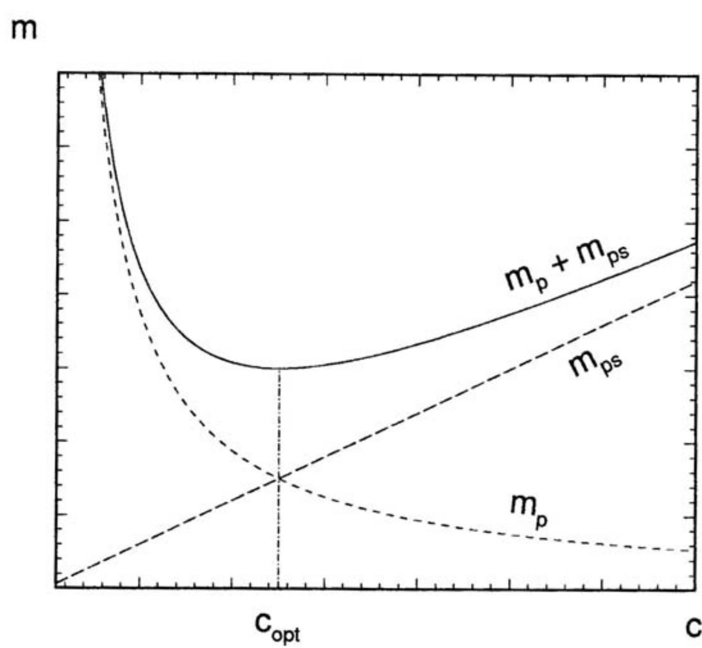


Figure 3.25: Ottimizzazione del valore della velocità efficace di uscita per ottenere la massa minima del sistema propulsivo.

Capitolo 4
Missioni lunari

Nel par. 1.2.5 abbiamo elencato i possibili obiettivi delle missioni lunari. Vogliamo in questo capitolo descrivere come realizzare tali missioni, e quantificare i relativi Δv.

4.1 Caratteristiche della Luna e della sua orbita

La massa m_L della Luna è di circa 73,5 · 10^{21} kg, ossia 1/81,3 volte quella della Terra, e di conseguenza la sua costante di potenziale di sorgente vale

$$\mu_L = G\,m_L = 4,903 \cdot 10^{12} \ \ \mathrm{m^3/s^2} \tag{4.1}$$

Il raggio equatoriale della Luna vale

$$R_L = 1738 \ \ \mathrm{km} \tag{4.2}$$

per cui la velocità di orbitazione circolare su un'ipotetica orbita di altezza zero risulta

$$v_{c,L} = \sqrt{\frac{\mu_L}{R_L}} = 1680 \ \ \mathrm{m/s} \tag{4.3}$$

Se invece, più realisticamente, consideriamo un'orbita di altezza per esempio 100 km, si trova che la velocità di orbitazione circolare è di 1633 m/s. La velocità di fuga dalla Luna risulta poi

$$v_{e,L} = \sqrt{\frac{2\,\mu_L}{R_L}} = 2375 \;\; \text{m/s} \tag{4.4}$$

La distanza *media* Terra–Luna è di 384 400 km; si può pertanto determinare, in base al rapporto di masse citato sopra, che il centro di massa del sistema costituito dalla Terra e dalla Luna si trova a circa 4700 km dal centro della Terra, ed i due corpi celesti ruotano in realtà entrambi attorno a tale punto. Il raggio della sfera di influenza della Luna si trova essere

$$R_s = \frac{384\,400}{81{,}3^{2/5}} = 66\,200 \;\; \text{km} \tag{4.5}$$

Osserviamo subito che tale valore *non* è trascurabile rispetto alla distanza Terra—Luna.

L'orbita della Luna è comunque ellittica, con eccentricità 0,0549, e viene descritta in un periodo di 27,32 d (periodo siderale, riferito cioè alla posizione delle stelle fisse). L'inclinazione dell'orbita della Luna *rispetto al piano dell'eclittica* è di 5°8'; la linea dei nodi tuttavia descrive un giro completo in 18,6 a, per cui l'angolo fra il piano equatoriale terrestre ed il piano dell'orbita della Luna varia tra un minimo di 23°27' - 5°8' = 18°19' ed un massimo di 23°27' + 5°8' = 28°35' (essendo ovviamente 23°27' l'inclinazione dell'eclittica rispetto all'equatore terrestre) con lo stesso periodo; la fig. 4.1 riporta appunto la variazione nel tempo dell'angolo fra questi due piani.

La linea degli absidi dell'orbita della Luna descrive poi, per effetto della precessione absidale, un giro completo in un tempo di 8,9 a.

4.2 Missione lunare secondo l'approccio delle coniche raccordate

Richiamiamo in questa sezione gli elementi della descrizione di una missione lunare secondo l'approccio delle coniche raccordate (vedi anche [1], par. 6.3), allo scopo di identificare il Δv richiesto per missioni di questo tipo, ed i problemi che si incontrano.

Avanziamo una serie di ipotesi semplificative: a) la Luna orbita intorno alla Terra (abbiamo visto invece che in realtà Terra e Luna orbitano intorno al centro di massa del sistema); b) assumiamo che

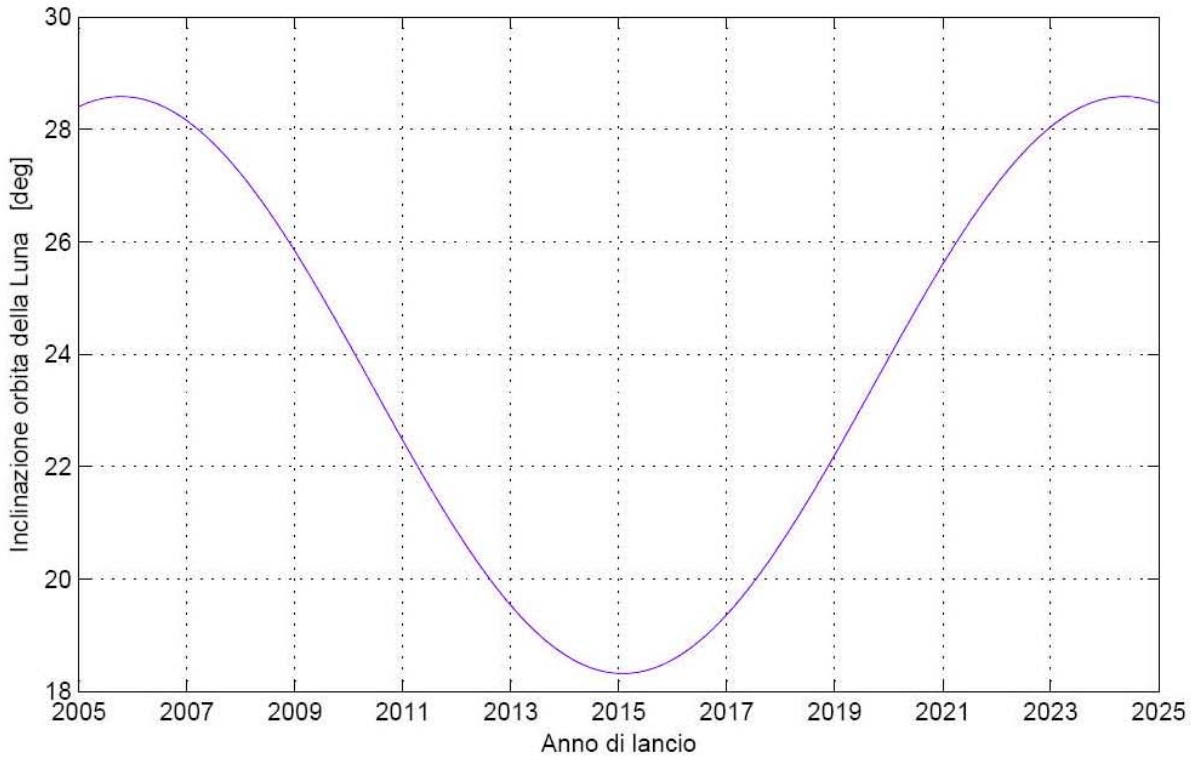


Figure 4.1: Variazione dell'angolo fra piano equatoriale terrestre e piano dell'orbita lunare nel corso degli anni.

l'orbita della Luna sia circolare (anziché ellittica); c) supponiamo che la traiettoria di trasferimento giaccia nel piano dell'orbita lunare (il che richiede che l'inclinazione dell'orbita di parcheggio terrestre sia scelta in modo appropriato); d) quando il veicolo si trova entro la sfera d'influenza della Terra, assumiamo che esso segua un'orbita intorno alla Terra non perturbata (dalla Luna, dal Sole, dagli altri corpi del sistema solare); e) quando il veicolo si trova entro la sfera d'influenza della Luna, assumiamo parimenti che esso descriva un'orbita intorno alla Luna non perturbata (dalla Terra, dal Sole, dagli altri corpi del sistema solare). Riguardo al punto c), osserviamo che questa ipotesi comporta che il veicolo sia iniettato in un'orbita di inclinazione opportuna rispetto al piano equatoriale terrestre, compresa come detto tra 18°19' e 28°35' a seconda della data di lancio prescelta. La corrispondente componente della velocità iniziale dovuta alla rotazione della Terra, data dalla (2.32), che può quindi essere portata in detrazione al Δv che deve fornire il sistema propulsivo, spazierà perciò tra circa 408,5 m/s (per i = 28°35') e 441,5 m/s (per i = 18°19'), con una differenza tra gli estremi di soli 33 m/s, indicando pertanto un impatto molto limitato della data di lancio sulle esigenze propulsive.

La fig. 4.2 illustra un trasferimento di questo tipo. Inizialmente il veicolo si trova su un'orbita

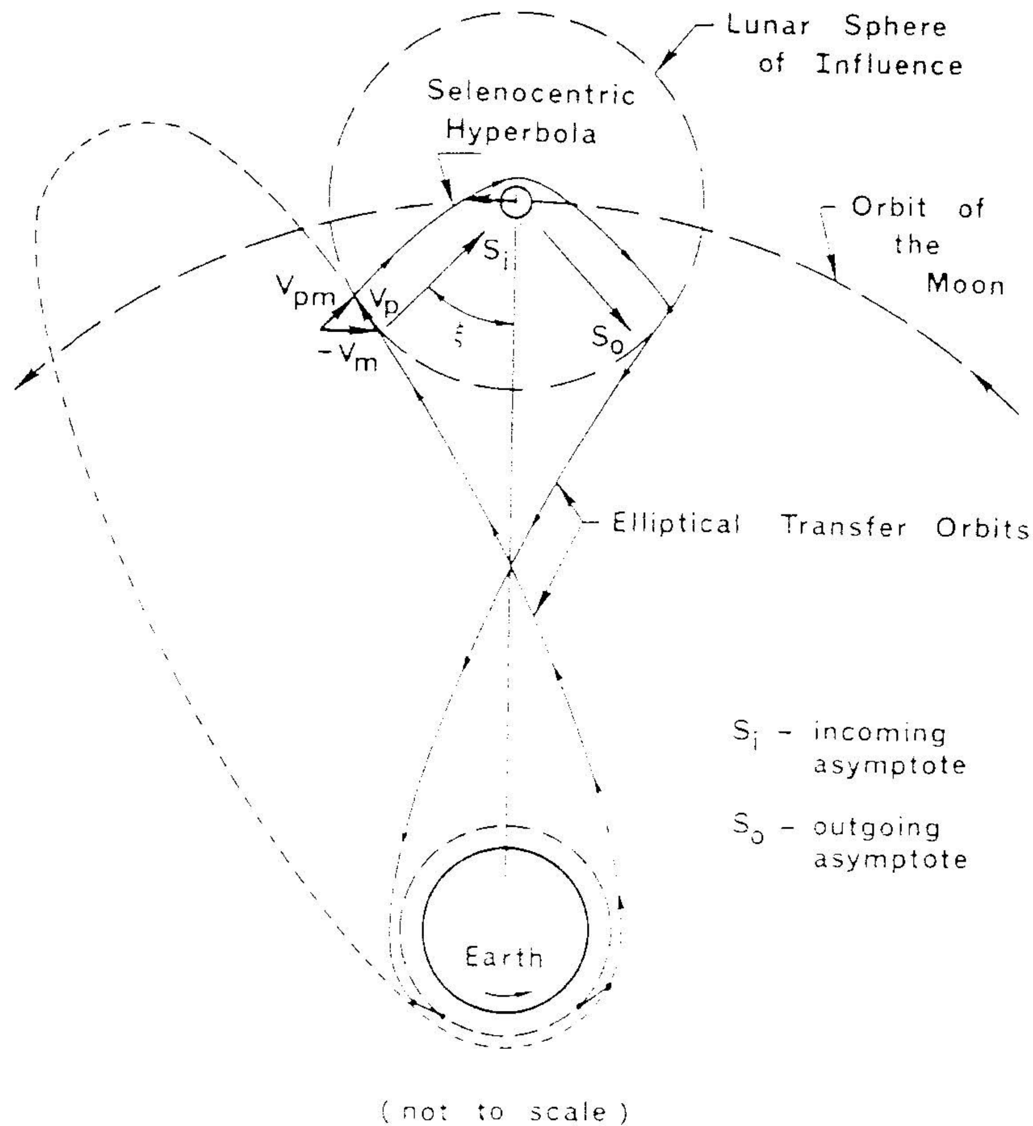


Figure 4.2: Traiettoria lunare basata sul concetto delle coniche raccordate.

circolare terrestre bassa, viene quindi iniettato in un'orbita ellittica (rispetto alla Terra) fortemente allungata, che lo porta ad entrare nella sfera d'influenza della Luna. La traiettoria rispetto alla Luna è evidentemente un'iperbole (in quanto il veicolo proviene da una regione esterna alla sfera d'influenza della Luna); in prossimità del passaggio al periabside, si possono effettuare manovre di inserimento in orbita circolare o ellittica, oppure di discesa verso la superficie. Valori rappresentativi dei parametri di una tipica orbita iperbolica di avvicinamento alla Luna sono illustrati in fig. 4.3.

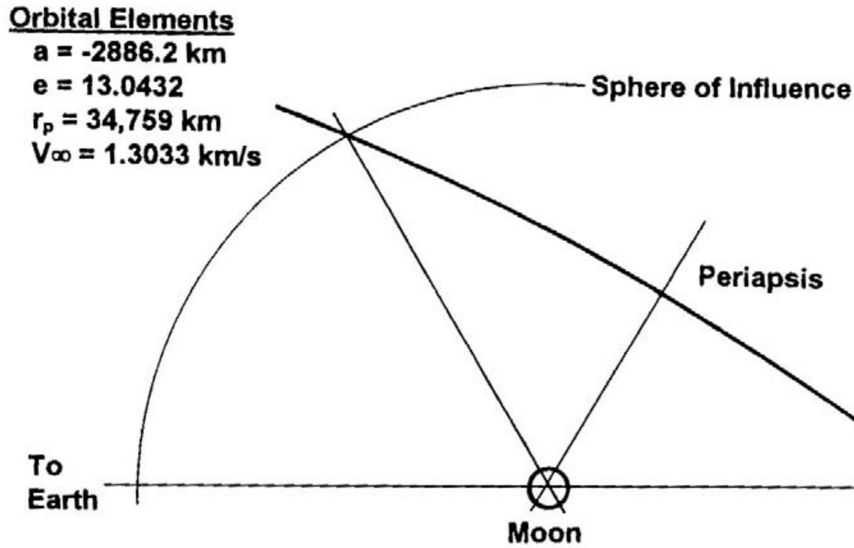


Figure 4.3: Dettaglio della traiettoria iperbolica di avvicinamento alla Luna.

I parametri di un'orbita di trasferimento cislunare sono indicati in fig. 4.4. Chiamati t_0 l'istante di iniezione nell'orbita di trasferimento a partire dall'orbita di parcheggio terrestre, e t_1 l'istante in cui il veicolo entra nella sfera d'influenza lunare, la figura riporta la posizione della Luna lungo la sua orbita in questi due istanti. Sia D la distanza Terra–Luna, intesa come raggio dell'orbita della Luna (supposta, come detto, circolare). Al tempo t_0 possiamo identificare:

- il raggio r_0 (dal centro della Terra) al momento dell'iniezione nell'orbita di trasferimento cislunare;
- la velocità v_0 al momento dell'iniezione;
- l'angolo di volo γ_0 al momento dell'iniezione;
- l'angolo ϕ_0 formato tra la congiungente Terra–Luna ed il raggio vettore r_0 che identifica la posizione del veicolo, al momento dell'iniezione; assumendo come positivo il verso antiorario, si può vedere dalla fig. 4.4 che esso risulta negativo.

Osserviamo che se la manovra di inserimento in orbita cislunare fosse impulsiva, r_0 coinciderebbe con il raggio dell'orbita di parcheggio terrestre; in tal caso la manovra più economica (Δv di inserimento in orbita cislunare allineato con la velocità del veicolo sull'orbita di parcheggio) comporta un angolo di volo γ_0 nullo. Per manovre con tempi di spinta finiti, queste condizioni non sono in genere verificate.

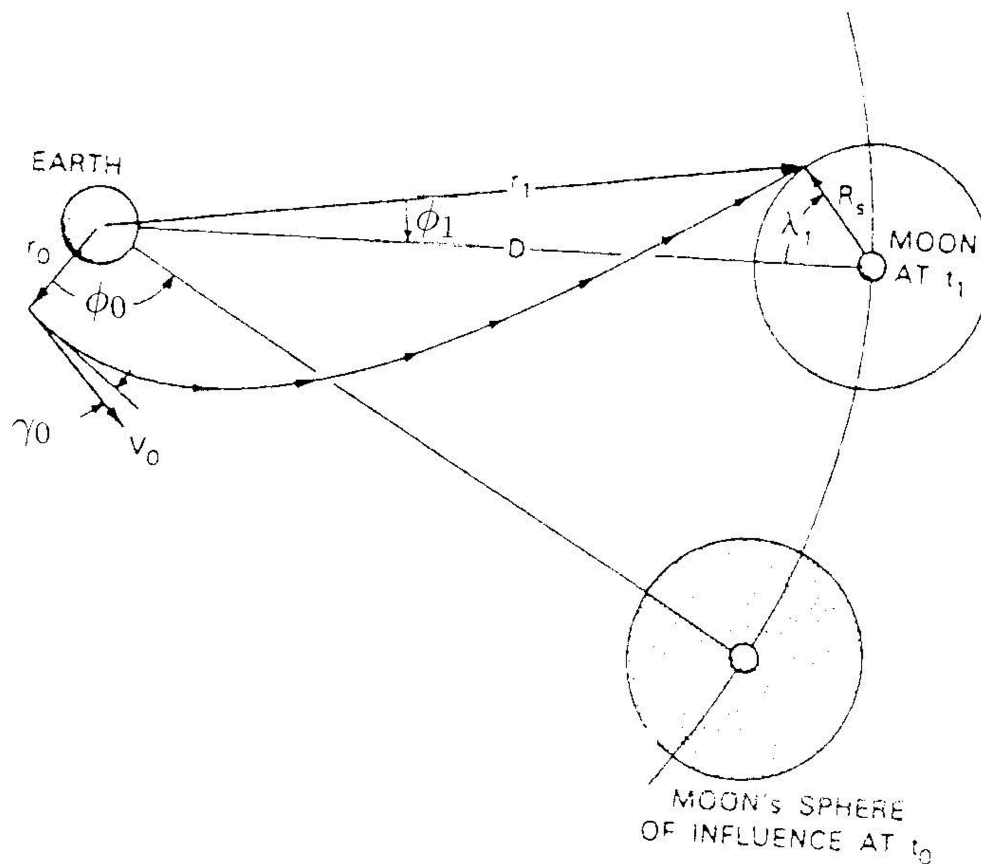


Figure 4.4: Parametri dell'orbita di trasferimento cislunare.

Al tempo t_1 possiamo poi identificare:

- il raggio r_1 (dal centro della Terra) al momento dell'ingresso nella sfera d'influenza lunare;
- la velocità v_1 (rispetto alla Terra) al momento dell'ingresso;
- l'angolo di volo γ_1 (rispetto all'orizzontale terrestre locale) al momento dell'ingresso;
- l'angolo ϕ_1 formato tra la congiungente Terra–Luna ed il raggio r_1 al momento dell'ingresso, che risulta positivo;
- l'angolo λ_1, detto *angolo di fase*, formato tra la congiungente Terra–Luna al momento dell'ingresso, ed il raggio congiungente il centro della Luna con la posizione del satellite allo stesso istante (di lunghezza ovviamente R_s).

Dati i valori di r_0, v_0, γ_0 all'iniezione in orbita di trasferimento cislunare, vogliamo:

a) individuare il valore dell'angolo di fase λ_1 che permette di conseguire un'orbita attorno alla Luna di raggio di periabside[9] $r_{p,L}$ assegnato;

b) individuare il corrispondente valore dell'angolo ϕ_0 necessario per conseguire l'obiettivo citato in a).

Iniziamo innanzitutto ad individuare i valori dell'energia meccanica totale e momento angolare dell'orbita ellittica di trasferimento (valori riferiti al moto rispetto alla Terra):

$$\mathcal{E}_T = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_0} \tag{4.6}$$

$$\hat{h}_T = r_0 \, v_0 \, \cos\gamma_0 \tag{4.7}$$

Le lunghezze dei lati del triangolo formato da r_1, D, R_s sono legate all'angolo di fase attraverso il teorema del coseno di Carnot

$$r_1 = \sqrt{D^2 + R_S^2 - 2 \, D \, R_S \, \cos\lambda_1} \tag{4.8}$$

Si ossrvi che il valore di λ_1 è al momento incognito; dato un valore di primo tentativo, esso verrà successivamente aggiustato per ottenere il valore del raggio di perilunio desiderato, come accennato. La velocità rispetto alla Terra al momento dell'ingresso si ottiene allora come[10]

$$v_1 = \sqrt{2 \left(\mathcal{E}_T + \frac{\mu_T}{r_1} \right)} \tag{4.9}$$

Il momento angolare può anche essere espresso come

[9]Anche detto perilunio, pericinzio, periselenio, come pure sono usati i termini apolunio, apocinzio, aposelenio per l'apoabside.

[10]Si osservi che, a differenza di quanto ipotizzato per i trasferimenti interplanetari descritti mediante l'approccio delle coniche raccordate, vedi successivo cap. 5, in questo caso *non* si è assunto che la velocità del veicolo al confine della sua sfera di influenza coincida con la velocità in eccesso; questo perché il limitato valore del raggio della sfera d'influenza lunare rende questa approssimazione poco soddisfaciente.

$$\hat{h}_T \;=\; r_1\, v_1\, \cos\gamma_1 \tag{4.10}$$

dove il valore del primo membro è noto dalla (4.7), per cui l'angolo di volo può essere esplicitato nella forma

$$\gamma_1 \;=\; \cos^{-1}\left(\frac{\hat{h}_T}{r_1\, v_1}\right) \tag{4.11}$$

Osservando come può essere espressa l'altezza del triangolo di lati r_1, D, R_s citato si ottiene

$$r_1\, \sin\phi_1 \;=\; R_s\, \sin\lambda_1 \tag{4.12}$$

e si ricava quindi l'angolo ϕ_1

$$\phi_1 \;=\; \sin^{-1}\left(\frac{R_s\, \sin\lambda_1}{r_1}\right) \tag{4.13}$$

Identificate le condizioni all'ingresso della sfera d'influenza lunare in un sistema di riferimento geocentrico, dobbiamo ora convertirle in un riferimento selenocentrico, vedi fig. 4.5, in moto rispetto al primo con velocità

$$v_L \;=\; \sqrt{\frac{\mu_T}{D}} \;=\; 1018\ \ \text{m/s} \tag{4.14}$$

che nella figura citata è diretta verticalmente verso l'alto. La velocità v_2, *relativa alla Luna*, del veicolo all'ingresso nella sfera d'influenza lunare[11] si trova ancora dal teorema di Carnot come

$$v_2 \;=\; \sqrt{v_1^2 \;+\; v_L^2 \;-\; 2\, v_1\, v_L\, \cos(\gamma_1 \;-\; \phi_1)} \tag{4.15}$$

[11]Vedi nota precedente.

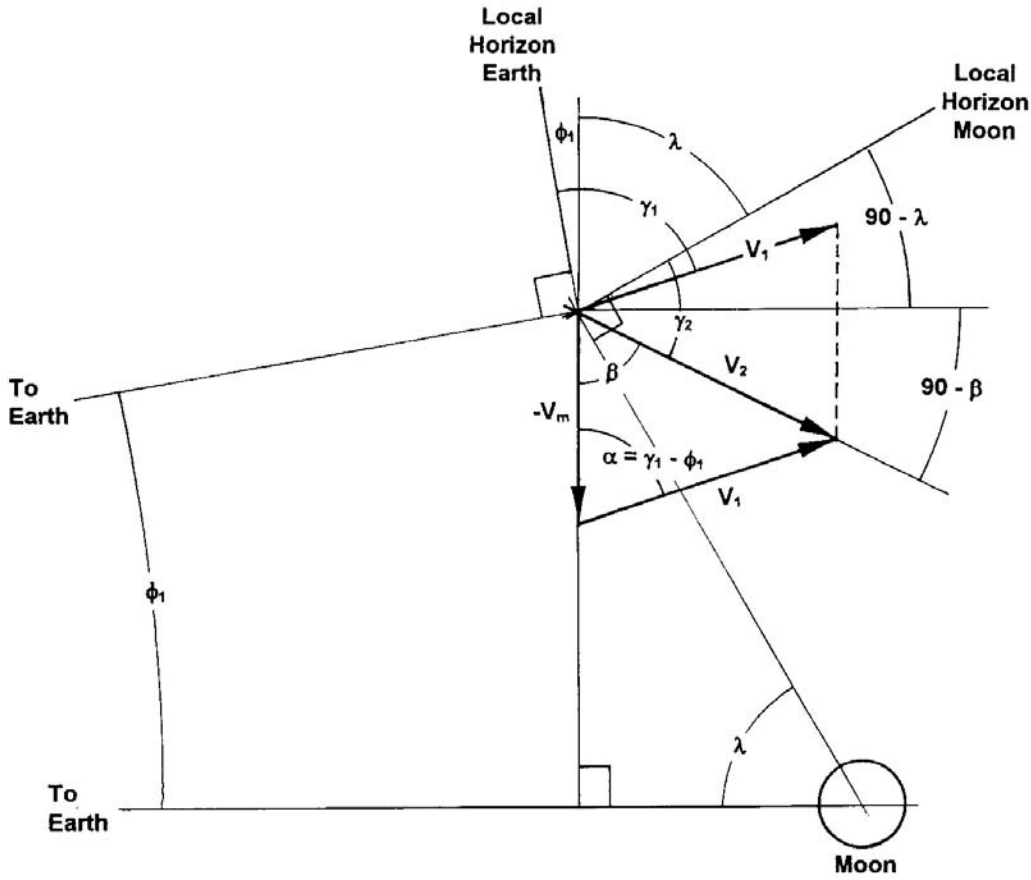


Figure 4.5: Composizione delle velocità all'ingresso della sfera d'influenza della Luna (nota: la velocità di orbitazione circolare della Luna intorno alla Terra, indicata nel testo come v_L, è qui indicata come v_m).

essendo l'angolo compreso tra la v_1 e v_L data dalla differenza tra l'angolo di volo γ_1 (che v_1 forma rispetto all'orizzontale terrestre) ed un angolo che risulta uguale a ϕ_1, essendo formato da lati perpendicolari ai lati di quest'ultimo angolo. Possiamo quindi identificare le costanti, energia meccanica totale e momento angolare, del moto rispetto alla Luna

$$\mathcal{E}_L = \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu_L}{R_s} \tag{4.16}$$

$$\hat{h}_L = R_s \, v_2 \, \cos \gamma_2 \tag{4.17}$$

dove l'angolo di volo γ_2, tra la direzione della velocità v_2 relativa alla Luna e l'orizzontale *lunare*, risulta essere (si noti che esso è negativo)

$$-\gamma_2 \;=\; \pi \;-\; \lambda_1 \;-\; \beta \tag{4.18}$$

in quanto, come si può vedere dalla fig. 4.5, esso può essere espresso sottraendo all'angolo piano formato dalle direzioni $-v_L$ e v_L l'angolo λ_1 (tra direzione dell'orizzontale lunare e direzione di v_L), e l'angolo β tra le direzioni di $-v_L$ e della velocità v_2. L'angolo λ_1 è la grandezza che intendiamo individuare, mentre l'angolo β può essere ricavato applicando il teorema di Carnot al triangolo formato da v_2, v_1, $-v_L$:

$$v_1^2 \;=\; v_2^2 \;+\; v_L^2 \;-\; 2\, v_2\, v_L\, \cos\beta \tag{4.19}$$

da cui ovviamente

$$\beta \;=\; \cos^{-1}\left(\frac{v_2^2 \;+\; v_L^2 \;-\; v_1^2}{2\, v_2\, v_L}\right) \tag{4.20}$$

Dobbiamo adesso esplicitare il valore del raggio di periabside dell'orbita lunare, conseguito ipotizzando un dato valore di λ_1. A tal fine, esprimiamo le costanti orbitali (4.16, 4.17) attraverso i valori al periabside (dove in particolare l'angolo di volo rispetto alla Luna è nullo)

$$\mathcal{E}_L \;=\; \frac{v_{p,L}^2}{2} - \frac{\mu_L}{r_{p,L}} \tag{4.21}$$

$$\hat{h}_L \;=\; r_{p,L}\, v_{p,L} \tag{4.22}$$

la prima delle quali, esprimendo $r_{p,L}$ dalla seconda come

$$r_{p,L} \;=\; \frac{\hat{h}_L}{v_{p,L}} \tag{4.23}$$

può essere riscritta come un'equazione di secondo grado in $v_{p,L}$

$$v_{p,L}^2 \; - \; 2\,\frac{\mu_L}{\hat{h}_L}\, v_{p,L} \; - \; 2\,\mathcal{E}_L \; = \; 0 \qquad (4.24)$$

la cui soluzione è

$$v_{p,L} \; = \; \frac{\mu_L}{h_L} \mp \sqrt{\frac{\mu_L^2}{\hat{h}_L^2} \, + \, 2\,\mathcal{E}_L} \; = \; \frac{\mu_L}{\hat{h}_L} + \sqrt{\frac{\mu_L^2}{\hat{h}_L^2} \, + \, 2\,\mathcal{E}_L} \qquad (4.25)$$

avendo scartato la soluzione che darebbe velocità negativa (si ricordi che $\mathcal{E}_L$ è positivo per iperboli). Trovata quindi la velocità al periabside dell'orbita lunare, il corrispondente raggio di periabside si ricava infine attraverso la (4.23)

Questo valore è stato trovato assumendo un (arbitrario) valore di λ_1 nelle (4.8,4.12,4.13,4.18); per conseguire il valore di $r_{p,L}$ desiderato, occorre quindi effettuare iterazioni alterando il valore di λ_1 assegnato in prima approssimazione, fino a convergenza.

Per individuare l'angolo ϕ_0, come stabilito nell'obiettivo b) sopra, conviene innanzitutto calcolare il semi–lato retto dell'ellisse di trasferimento (porzione geocentrica della traiettoria), vedi [1], par. 1.8

$$p \; = \; \frac{\hat{h}_T^2}{\mu_T} \qquad (4.26)$$

ed il *moto medio* della Luna sulla sua orbita, vedi [1], par. 2.7

$$n_m \; = \; \frac{2\,\pi}{T_L} \; = \; \frac{\sqrt{\mu_T}}{D^{3/2}} \; = \; 2,662 \, \cdot \, 10^{-6} \text{ rad/s} \qquad (4.27)$$

Si noti che il semiasse maggiore a dell'ellisse di trasferimento può essere trovato dalla (2.36), e la sua eccentricità dalla relazione, vedi [1], par. 1.9.1

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \tag{4.28}$$

Si possono allora calcolare le anomalie vere al momento dell'iniezione in orbita cislunare, vedi ancora [1], par. 1.8

$$\nu_0 = \cos^{-1}\left(\frac{p - r_0}{r_0\, e}\right) \tag{4.29}$$

e dell'ingresso nella sfera d'influenza lunare

$$\nu_1 = \cos^{-1}\left(\frac{p - r_1}{r_1\, e}\right) \tag{4.30}$$

Si possono quindi calcolare le corrispondenti anomalie eccentriche, vedi [1], par. 2.7

$$E_0 = \cos^{-1}\left(\frac{e + \cos\nu_0}{1 + e\cos\nu_0}\right) \tag{4.31}$$

$$E_1 = \cos^{-1}\left(\frac{e + \cos\nu_1}{1 + e\cos\nu_1}\right) \tag{4.32}$$

le quali permettono di identificare l'intervallo di tempo necessario a percorrere la porzione geocentrica della traiettoria (cioè tra iniezione ed ingresso nella sfera d'influenza lunare)

$$\Delta t_T = t_1 - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_T}}\,\left[(E_1 - e\sin E_1) - (E_0 - e\sin E_0)\right] \tag{4.33}$$

Si può evincere dalla fig. 4.4 che la differenza $\nu_1 - \nu_0$ tra anomalia vera all'ingresso della sfera d'influenza lunare, e quella all'iniezione, risulta uguale alla differenza degli angoli ϕ_1 e ϕ_0 (quest'ultimo come detto negativo, per cui la differenza in questione equivale alla somma $\phi_1 + \mid \phi_0 \mid$) più l'angolo descritto dalla Luna nel tempo Δ_T:

$$\nu_1 \,-\, \nu_0 \,=\, \phi_1 \,-\, \phi_0 \,+\, n_m \, \Delta t_T \tag{4.34}$$

dalla quale si ricava infine ϕ_0

$$\phi_0 \,=\, \phi_1 \,+\, n_m \, \Delta t_T \,-\, (\nu_1 \,-\, \nu_0) \tag{4.35}$$

con ϕ_1 dato dalla (4.13).

Per ricavare poi l'intervallo di tempo necessario a percorrere la porzione selenocentrica della traiettoria (cioè tra ingresso nella sfera d'influenza lunare e raggiungimento del perilunio), occorre prima determinare i parametri dell'orbita iperbolica selenocentrica (che designamo con l'indice L). L'energia meccanica totale dell'orbita selenocentrica, nota dalla (4.21), è esprimibile come, vedi [1], par. 1.10

$$\mathcal{E}_L \,=\, -\, \frac{\mu_L}{2 \, a_L} \tag{4.36}$$

e consente quindi di identificare il valore del semiasse maggiore di tale orbita (ovviamente negativo, trattandosi di un'iperbole)

$$a_L \,=\, -\, \frac{\mu_L}{2 \, \mathcal{E}_L} \tag{4.37}$$

L'eccentricità può poi essere determinata come, vedi [1], par. 1.9.2

$$e_L \,=\, 1 \,-\, \frac{r_{p,L}}{a_L} \tag{4.38}$$

In un'orbita iperbolica il raggio è legato alla posizione, identificata dall'anomalia vera ν, dalla relazione, vedi ancora [1], par. 1.9.2

$$r = \frac{a_L (1 - e_L^2)}{1 + e_L \cos\nu} \tag{4.39}$$

Applicando questa relazione nel punto di ingresso entro la sfera di influenza lunare (indice 2, $r_2 = R_s$) si ottiene l'anomalia vera in tale punto

$$\cos\nu_2 = \frac{a_L (1 - e_L^2)/r_2 - 1}{e_L} \tag{4.40}$$

$$\nu_2 = \cos^{-1}\left[\frac{a_L (1 - e_L^2)/r_2 - 1}{e_L}\right] \tag{4.41}$$

L'anomalia vera al momento del passaggio al periselenio (al quale assegnamo l'indice 3) è nulla per definizione

$$\nu_3 = \nu_{p,L} = 0 \tag{4.42}$$

Si può allora ricavare l'anomalia eccentrica iperbolica del punto di ingresso nella sfera d'influenza lunare dalla relazione, vedi [1], par. 2.8

$$\cosh F_2 = \frac{e + \cos\nu_2}{1 + e\cos\nu_2} \tag{4.43}$$

la quale può essere invertita per ottenere F_2 secondo la relazione

$$F_2 = \log(\cosh F_2 + \sqrt{\cosh^2 F_2 - 1}) \tag{4.44}$$

L'anomalia eccentrica iperbolica del periselenio è ancora nulla. Il tempo necessario a percorrere l'iperbole tra l'ingresso nella sfera d'influenza lunare ed il periselenio risulta quindi, vedi ancora [1], par. 2.8

$$\Delta t_L = t_3 - t_2 = -\frac{e_L \sinh F_2 - F_2}{n_L} \tag{4.45}$$

dove il moto medio della sonda sulla traiettoria selenocentrica iperbolica è

$$n_L = \sqrt{-\frac{\mu_L}{a^3}} \tag{4.46}$$

Il tempo complessivo del trasferimento cislunare è ovviamente la somma dei tempi relativi alle due porzioni, geocentrica e selenocentrica, della traiettoria

$$\Delta t = \Delta t_T + \Delta t_L \tag{4.47}$$

4.2.1 Sensibilità alle condizioni di iniezione in orbita di trasferimento

Il trasferimento descritto nel par. 4.2 richiede una notevolissima precisione di iniezione nell'ellisse di trasferimento. Si consideri che, per esempio, la variazione del valore del semiasse maggiore di tale ellisse, per effetto di un errore di solo un m/s nella velocità di iniezione, dato dalla (3.28), risulta maggiore di 4000 km. Sussiste quindi un'estrema sensibilità alle condizioni di iniezione, per cui è impensabile pensare di riuscire a conseguire l'iniezione con la precisione richiesta. Si dovrà ricorrere necessariamente a (ripetute) manovre di correzione della traiettoria durante il trasferimento (*mid–course corrections*), le quali richiedono un certo Δv_{corr}, orientativamente quantificabile intorno ai 100 m/s.

Riportiamo di seguito alcuni risultati, tratti da [22], relativi ad un trasferimento a partire da un'orbita di parcheggio terrestre di altezza 320 km; in questo caso però l'angolo λ_1 è stato fissato al valore di 65° (non si effettua quindi un'iterazione su questa grandezza).

La fig. 4.6 mostra il tempo di volo in funzione della velocità d'iniezione in orbita di trasferimento v_0, dato dalla (4.47). La velocità d'iniezione minima richiesta è intorno ai 10 810 m/s, a cui corrisponde

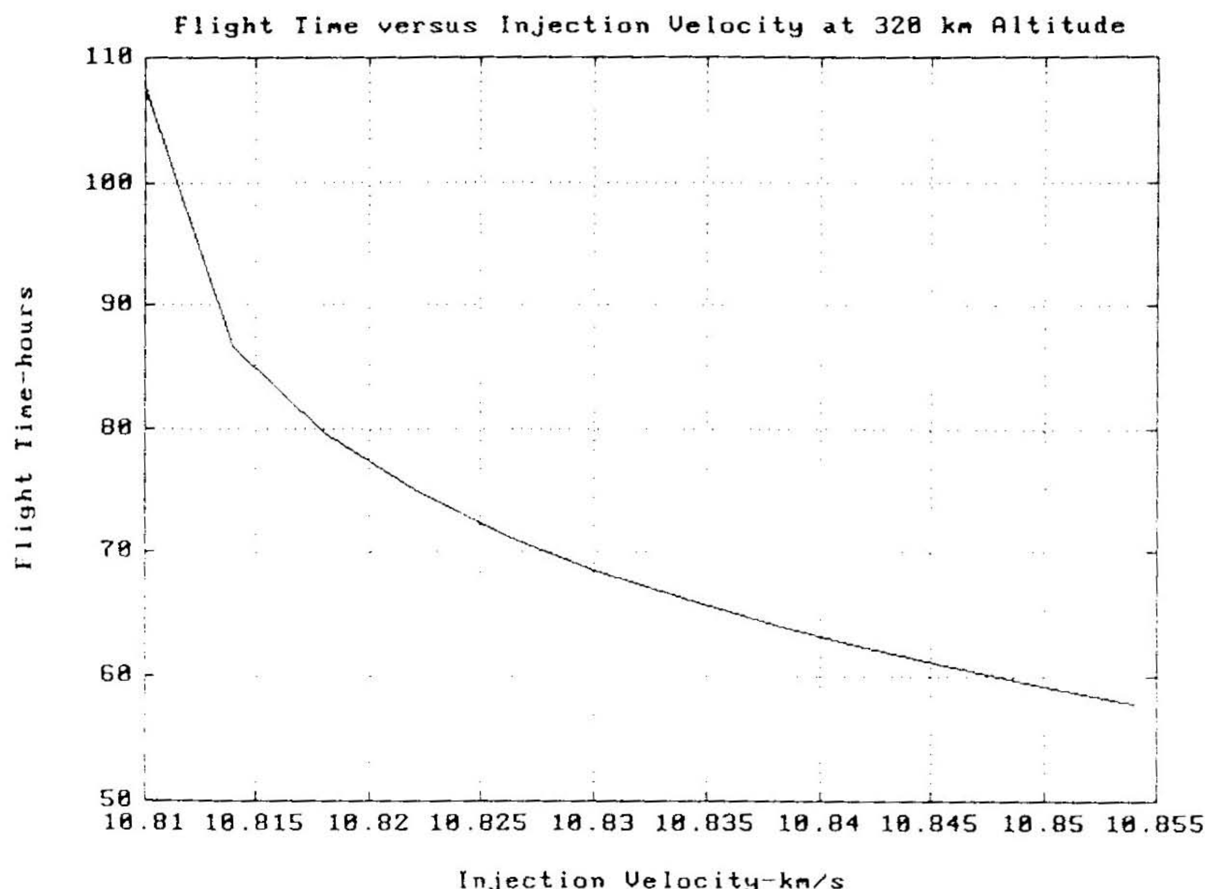


Figure 4.6: Tempo di volo per missione lunare in funzione della velocità d'iniezione, da [22].

un tempo di trasferimento di circa 4 giorni e mezzo. Tuttavia, innalzando anche di soli pochi m/s tale velocità, il tempo di trasferimento si riduce di molto; questo conferma l'estrema sensibilità alle condizioni d'iniezione (che arriva sino a circa 4 h per m/s).

Analogamente, la fig. 4.7 mostra il raggio di perilunio in funzione della velocità d'iniezione. Anche qui si osserva un'estrema sensibilità (che arriva sino a circa 1200 km per m/s) la quale indica che per conseguire il valore desiderato del raggio di periabside lunare occorrerebbe una precisione sulla velocità d'iniezione dell'ordine dei mm/s, chiaramente non conseguibile. In particolare, si osserva che in un ristretto campo di velocità d'iniezione, tra circa 10 813 e 10 822 m/s, il raggio di periabside risulta inferiore al raggio della Luna, per cui chiaramente si ha un impatto alla superficie.

Ancora, la fig. 4.8 mostra la velocità del veicolo al periabside dell'orbita lunare in funzione della velocità d'iniezione, che indica una sensibilità di $v_{p,L}$ fino a circa 1000 m/s per m/s di errore su v_0

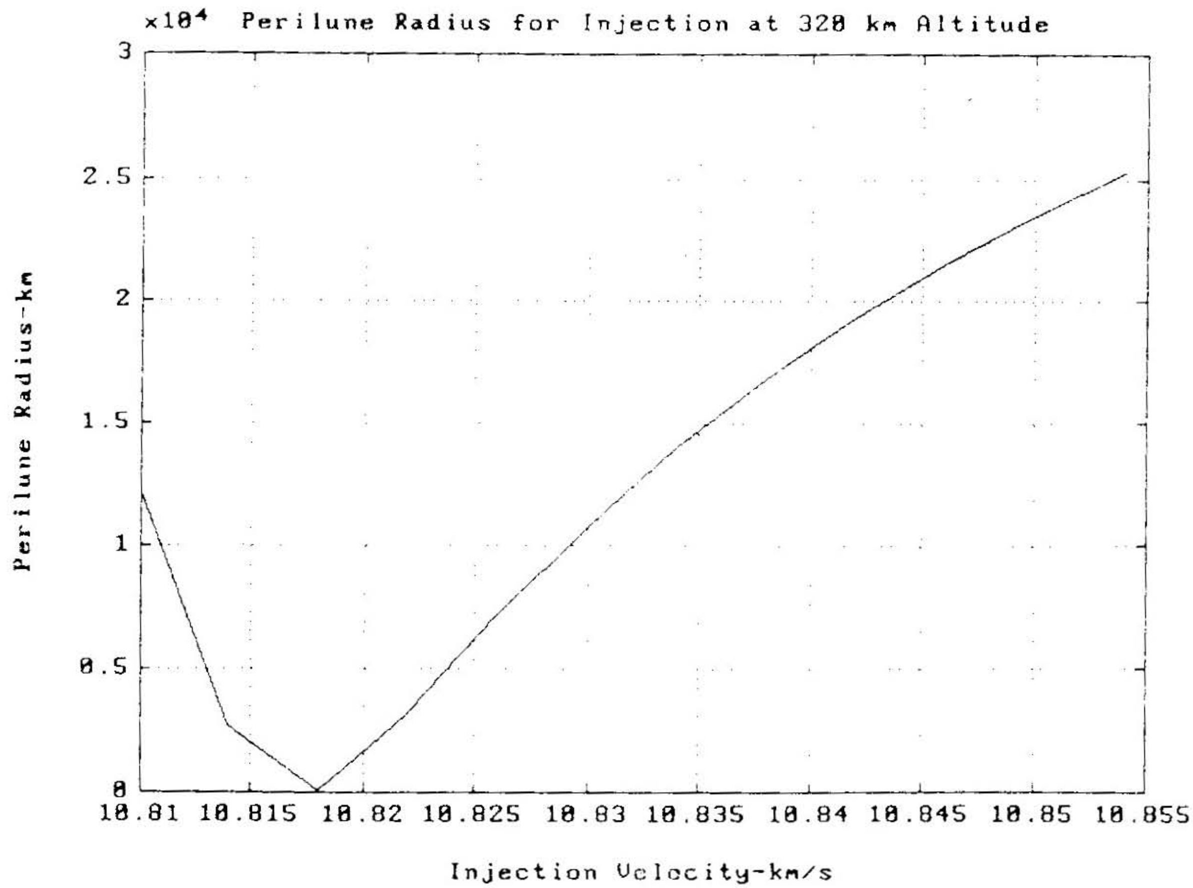


Figure 4.7: Raggio di periabside lunare in funzione della velocità d'iniezione (si noti che la scala delle ordinate va moltiplicata per 10000), da [22].

(però ancora, per v_0 compreso tra circa 10 813 e 10 822 m/s, si ha un'impatto sulla superficie). Le figure confermano quindi la necessità di correzioni intermedie per effettuare missioni lunari.

4.3 Δv per missioni lunari

Abbiamo citato nel par. 1.2.5 i vari tipi di missioni lunari ipotizzabili, vogliamo ora dettagliare, per ciascuna di esse, i vari contributi da contabilizzare per arrivare al Δv complessivamente richiesto.

Per una missione di sorvolo (*fly–by*) o di impatto sulla superficie lunare occorre fornire al veicolo la velocità v_0 definita nel par. 4.2, alla quale va sottratta la componente nel piano del moto della

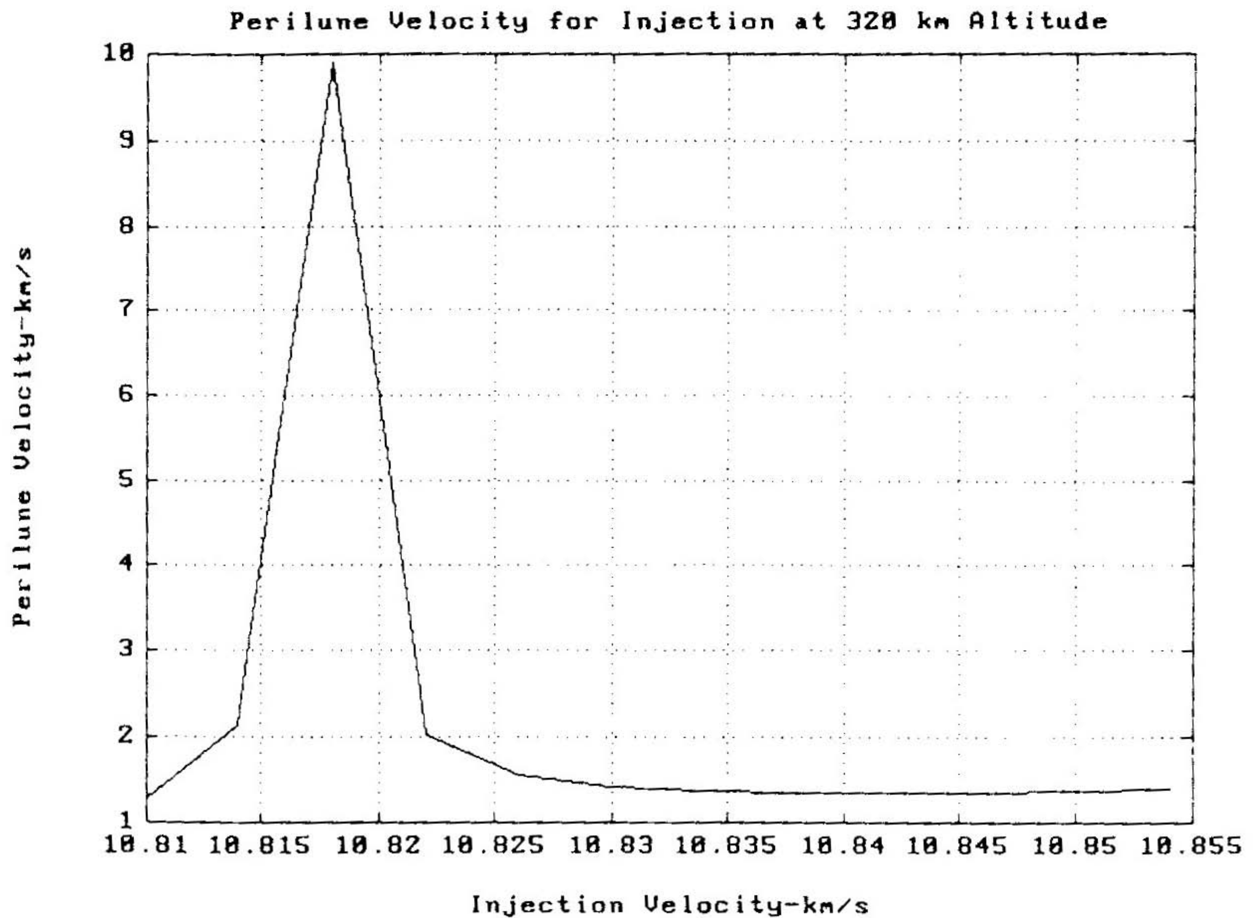


Figure 4.8: Velocità al periabside lunare in funzione della velocità d'iniezione, da [22].

velocità dovuta alla rotazione della Terra, un Δv per compensare le perdite propulsive in prossimità della Terra, ed un Δv per le correzioni di traiettoria intermedie:

$$\Delta v_{fb} \;=\; v_0 \;-\; v_{0,T} \;+\; \Delta v_{losses,T} \;+\; \Delta v_{corr} \tag{4.48}$$

Per una missione di inserimento in un'orbita lunare (per esempio circolare), occorre aggiungere ai precedenti un Δv per circolarizzare l'orbita in prossimità del periabside della traiettoria di avvicinamento alla Luna, e le relative perdite propulsive:

$$\Delta v_{orb} \;=\; v_0 \;-\; v_{0,T} \;+\; \Delta v_{losses,T} \;+\; \Delta v_{corr} \;+\; \Delta v_{circ} \;+\; \Delta v_{losses,L} \tag{4.49}$$

In particolare, una volta conseguita la traiettoria con il desiderato raggio di periabside, ed individuata la velocità al periabside, vedi anche (4.25), si può effettuare in corrispondenza a tale periabside una manovra per inserire il veicolo in un'orbita circolare, la quale richiede un

$$\Delta v_{circ} = v_{p,L} - v_{c,L} \tag{4.50}$$

dove la velocità di orbitazione circolare attorno alla Luna è ovviamente

$$v_{c,L} = \sqrt{\frac{\mu_L}{r_{p,L}}} \tag{4.51}$$

Una missione di atterraggio morbido richiede un Δv per frenare il veicolo fino a velocità nulla in corrispondenza alla superficie della Luna, più le inevitabili perdite in prossimità della Luna stessa:

$$\Delta v_{soft} = v_0 - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} + \Delta v_{brak} + \Delta v_{losses,L} \tag{4.52}$$

Se non si attuasse frenaggio alcuno, la sonda arriverebbe sulla superficie lunare con una velocità che si ottiene facilmente dalla conservazione dell'energia meccanica totale

$$v_{impatto} = \sqrt{2\left(\mathcal{E}_L + \frac{\mu_L}{R_L}\right)} \tag{4.53}$$

Occorre tuttavia tener conto del fatto che a causa della rotazione della Luna attorno al suo asse, la sua superficie si muove rispetto ad un sistema inerziale con una velocità che assume il valore massimo all'equatore lunare:

$$v_{rot,L} = \frac{2\,\pi\,R_L}{27,32\,\cdot\,86400} \simeq 4,6 \ \ \text{m/s} \tag{4.54}$$

essendo il periodo di rotazione della Luna uguale al periodo siderale. A seconda del punto prescelto per l'atterraggio sulla Luna, il Δv necessario per il frenaggio sarà allora compreso tra un minimo di

$$\Delta v_{brak} = v_{impatto} - v_{rot,L} \tag{4.55}$$

ed un massimo di

$$\Delta v_{brak} = v_{impatto} + v_{rot,L} \tag{4.56}$$

Tali valori differiscono comunque di soli 9,2 m/s.

Una missione di andata e ritorno dalla Luna deve includere anche una fase propulsa che impartisca la velocità di fuga dalla Luna, qui indicata come $v_{e,L}$

$$\Delta v_{a/r} = v_0 - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} + \Delta v_{brak} + v_{e,L} + \Delta v_{losses,L} \tag{4.57}$$

In questo caso il termine $\Delta v_{losses,L}$ comprende le perdite in prossimità della Luna sia durante la fase di discesa che nella successiva fase di ascesa, per cui verosimilmente esse saranno circa il doppio di quelle considerate in (4.52).

Riportiamo ora i valori tipici dei Δv necessari per missioni lunari. Per una missione di sorvolo o impatto i vari contributi sono quantificabili come segue

$$\Delta v_{fb} = v_0 - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} \simeq 10825 - 425 + 1800 + 100 \simeq 12300 \text{ m/s} \tag{4.58}$$

dove v_0 è stimata dalla fig. 4.6, il contributo dovuto al moto di rotazione della Terra è stato stimato come valore medio tra gli estremi (408,5 e 441,5 m/s) precedentemente citati, ed è stato poi considerato un Δv per le perdite propulsive in prossimità della Terra di circa 1800 m/s, ed un Δv per le correzioni di traiettoria di 100 m/s, come indicato nel par. 4.2.1. Per una missione di inserimento in un'orbita circolare bassa, si può stimare

$$\Delta v_{orb} = v_0 - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} + \Delta v_{circ} + \Delta v_{losses,L} \simeq$$

$$\simeq 10825 - 425 + 1800 + 100 + 700 + 50 \simeq 13100 \text{ m/s} \tag{4.59}$$

avendo calcolato Δv_{circ} dalla (4.50), ed avendo stimato le perdite propulsive in prossimità della Luna in circa 50 m/s. Per una missione di atterraggio morbido si ha

$$\Delta v_{soft} \, = \, v_0 \, - \, v_{0,T} \, + \, \Delta v_{losses,T} \, + \, \Delta v_{corr} \, + \, \Delta v_{brak} \, + \, \Delta v_{losses,L} \, \simeq$$

$$\simeq \, 10825 \, - \, 425 \, + \, 1800 \, + \, 100 \, + \, 2400 \, + \, 300 \, \simeq \, 15000 \;\; \text{m/s} \tag{4.60}$$

dove per il Δv_{brak} si sono assunti 2400 m/s, in base alle (4.55,4.56), e con perdite propulsive in prossimità della Luna stimate in circa 300 m/s per questa missione più impegnativa. Infine, per una missione di andata e ritorno

$$\Delta v_{a/r} \, = \, v_0 \, - \, v_{0,T} \, + \, \Delta v_{losses,T} \, + \, 2\,\Delta v_{corr} \, + \, \Delta v_{brak} \, + \, v_{e,L} \, + \, 2\,\Delta v_{losses,L} \, \simeq$$

$$\simeq \, 10825 \, - \, 425 \, + \, 1800 \, + \, 200 \, + \, 2400 \, + \, 2400 \, + \, 600 \, \simeq \, 17800 \;\; \text{m/s} \tag{4.61}$$

dove si può notare che sono state raddoppiate le stime dei Δv per la correzione della traiettoria e per le perdite in prossimità della Luna, per tener conto sia dell'andata che del ritorno.

4.4 Trasferimento mediante orbita Belbruno

Oltre al trasferimento descritto nei paragrafi precedenti, esiste un'altra possibilità per raggiungere la Luna, che è stata escogitata da E.A. Belbruno della Princeton University [23]. Questa trae vantaggio da una descrizione del trasferimento come un problema a quattro corpi (Terra, Luna, Sole, veicolo), della quale possiamo brevemente citare solo i principali aspetti, non essendo trattabile con strumenti semplici.

Una missione lunare di questo tipo consta di un inserimento, a partire da un'orbita di parcheggio terrestre, in un'orbita ellittica estremamente allungata, in un passaggio in prossimità della Luna (in particolare, 'dietro' la Luna) per usufruire dell'effetto di *swing–by*, vedi successivo par. 5.3, in una correzione all'apogeo dell'orbita ellittica (a circa 1 500 000 km dalla Terra, quindi ai confini della sfera d'influenza terrestre), la quale porta infine il veicolo ad avvicinare la Luna, come mostrato in fig. 4.9. È stato dimostrato [24] che questa orbita porta a risparmiare complessivamente circa 150 m/s di Δv rispetto all'orbita descritta nel par. 4.2, con un conseguente risparmio di propellente, e quindi un incremento della massa del carico utile.

Tale orbita comporta tuttavia un'inconveniente, il lungo tempo di trasferimento, compreso tra i 3 ed i 5 mesi, dovuto alla necessità di descrivere un'orbita ellittica con semiasse maggiore estremamente grande, come mostrato in fig. 4.10, nella quale la posizione del veicolo è tracciata ad intervalli di cinque giorni.

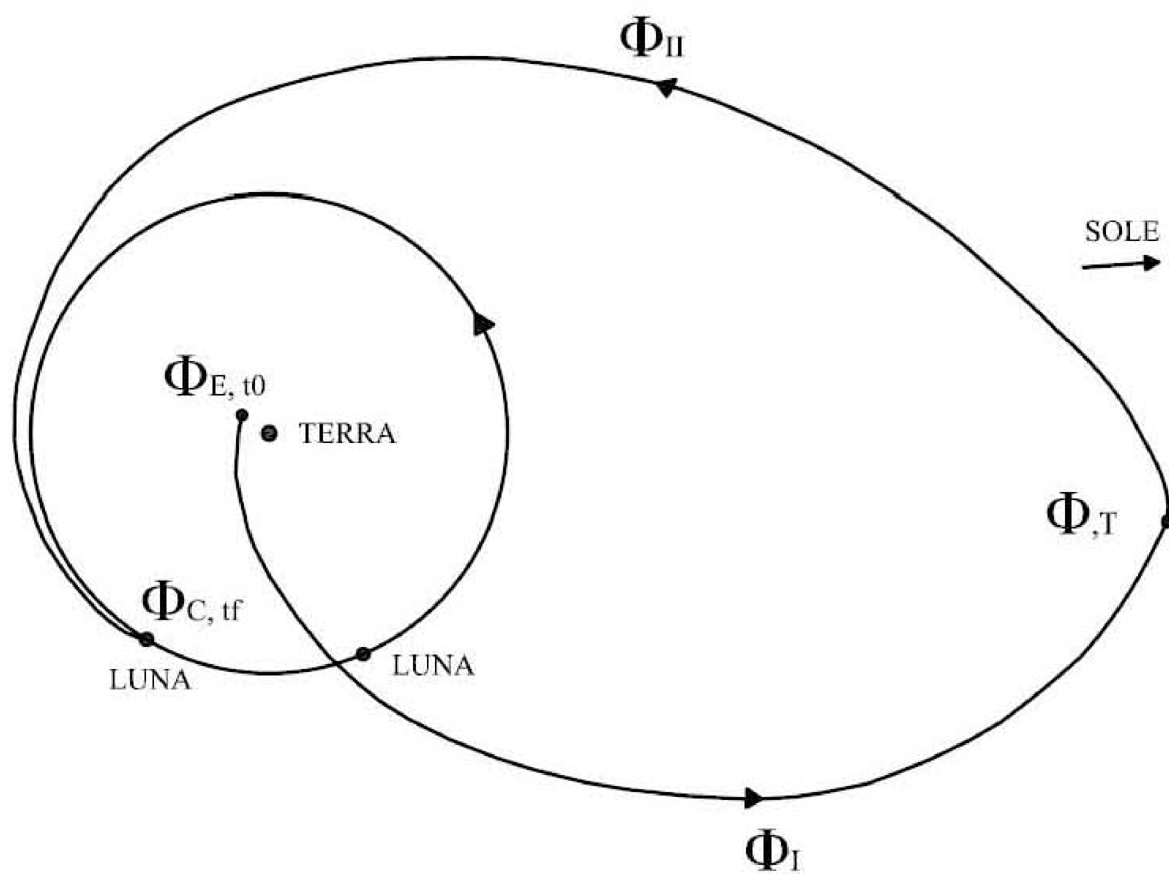


Figure 4.9: Orbita Belbruno.

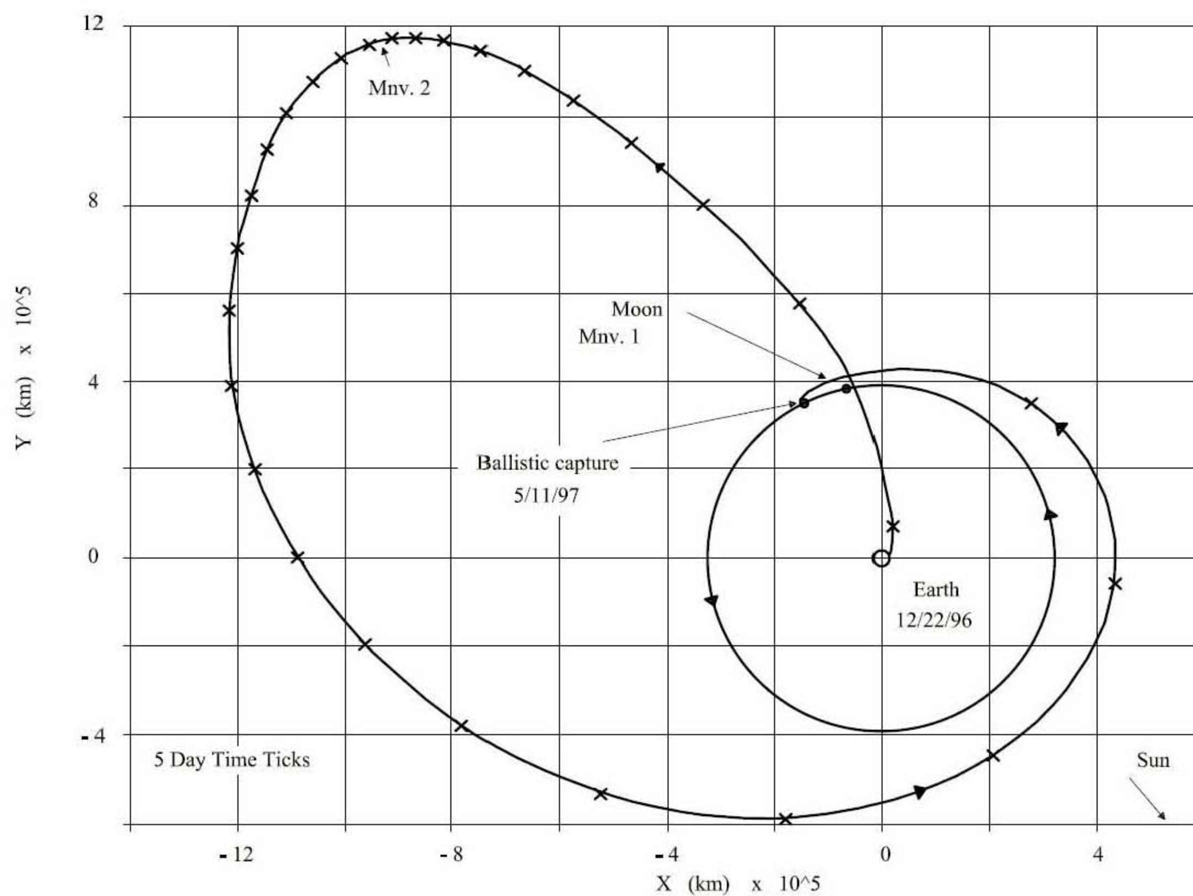


Figure 4.10: Evoluzione temporale dell'orbita Belbruno.

Capitolo 5
Missioni interplanetarie

Nel par. 1.2.6 abbiamo elencato i possibili obiettivi di missioni interplanetarie. Vogliamo in questo capitolo descrivere come realizzare tali missioni, e quantificare i relativi Δv.

5.1 Caratteristiche dei pianeti e delle loro orbite

Alcuni dati sulle orbite dei pianeti sono riportati in tab 5.1[12].

Pianeta	a AU	r_p 10^6 km	e	i gradi	v_c km/s
Mercurio	0,387	45,99	0,2056	7,005	47,89
Venere	0,723	107,43	0,0068	3,395	35,05
Terra	1,000	147,10	0,0167	0,000	29,77
Marte	1,524	206,72	0,0933	1,850	24,13
Giove	5,203	740,84	0,0482	1,305	13,05
Saturno	9,516	1345,02	0,0552	2,487	9,64
Urano	19,166	2729,29	0,0481	0,772	6,80
Nettuno	30,011	4447,85	0,0093	1,772	5,43
(Plutone)	39,557	4436,42	0,2503	17,150	4,73

Tab. 5.1. Distanza media dal Sole, raggio di perigeo, eccentricità, inclinazione, velocità di rivoluzione (circolare) delle orbite dei pianeti del sistema solare.

Si noti che in questa tabella la distanza media dal Sole è espressa in unità astronomiche, essendo un AU (*Astronomical Unit*) pari alla distanza media tra Terra e Sole, $149{,}6 \cdot 10^6$ km. È anche

[12] È incluso anche Plutone, nonostante esso sia stato recentemente derubricato dal novero dei pianeti maggiori per effetto di una più stringente definizione di pianeta adottata dalla *International Astronomical Union* nell'agosto 2006.

riportata, a titolo indicativo, la velocità di rivoluzione intorno al Sole che si avrebbe nel caso l'orbita sia approssimata ad un'orbita circolare, ipotesi che risulta accettabile per tutti i pianeti fatta eccezione di Mercurio e Plutone, le cui orbite presentano una significativa eccentricità (in particolare, l'orbita di Plutone, a causa della sua elevata eccentricità, presenta un perielio che risulta interno all'orbita di Nettuno). Questi due stessi pianeti presentano anche sensibili inclinazioni rispetto al piano dell'eclittica.

La tab. 5.2 riporta invece alcuni dati sui pianeti.

Pianeta	μ m^3/s^2	D km	v_c m/s	v_e m/s	$v_{rot,eq}$ m/s
Mercurio	$2{,}232 \cdot 10^{13}$	4878	3025	4278	3
Venere	$3{,}257 \cdot 10^{14}$	12102	7337	10376	-2
Terra	$3{,}986 \cdot 10^{14}$	12756	7905	11180	465
Marte	$4{,}305 \cdot 10^{13}$	6786	3562	5037	241
Giove	$1{,}268 \cdot 10^{17}$	142984	42114	59559	12679
Saturno	$3{,}795 \cdot 10^{16}$	120536	25094	35488	10279
Urano	$5{,}820 \cdot 10^{15}$	51118	15090	21340	-2492
Nettuno	$6{,}896 \cdot 10^{15}$	49528	16687	23600	2251
(Plutone)	$8{,}300 \cdot 10^{11}$	2320	846	1196	-13

Tab. 5.2. Costante di potenziale di sorgente, diametro equatoriale, velocità di orbitazione circolare (per un'ipotetica orbita equatoriale di altezza nulla), velocità di fuga, velocità all'equatore dovuta alla rotazione, per i diversi pianeti del sistema solare.

Da notare in questa tabella le elevate velocità di orbitazione circolare e di fuga dei pianeti più massicci, come pure le loro elevate velocità di rotazione all'equatore. Per contro, Mercurio, Venere e Plutone, per effetto delle loro dimensioni relativamente contenute e dei lunghi tempi di rotazione, presentano valori di velocità di rotazione all'equatore estremamente bassi. Per Venere, Urano e Plutone la velocità di rotazione all'equatore è riportata con il segno meno per indicare che tali pianeti ruotano attorno al proprio asse di moto retrogrado, ossia in senso contrario a quello del loro moto di rivoluzione attorno al Sole.

5.2 Trasferimento interplanetario basato sull'approccio delle coniche raccordate

Una prima approssimazione della descrizione di un trasferimento interplanetario è quella basata sull'approccio delle coniche raccordate, vedi fig. 5.1 (in particolare, il caso riportato in figura è relativo ad un trasferimento dalla Terra verso un pianeta interno, ma il concetto si applica egualmente ad un trasferimento verso un pianeta esterno).

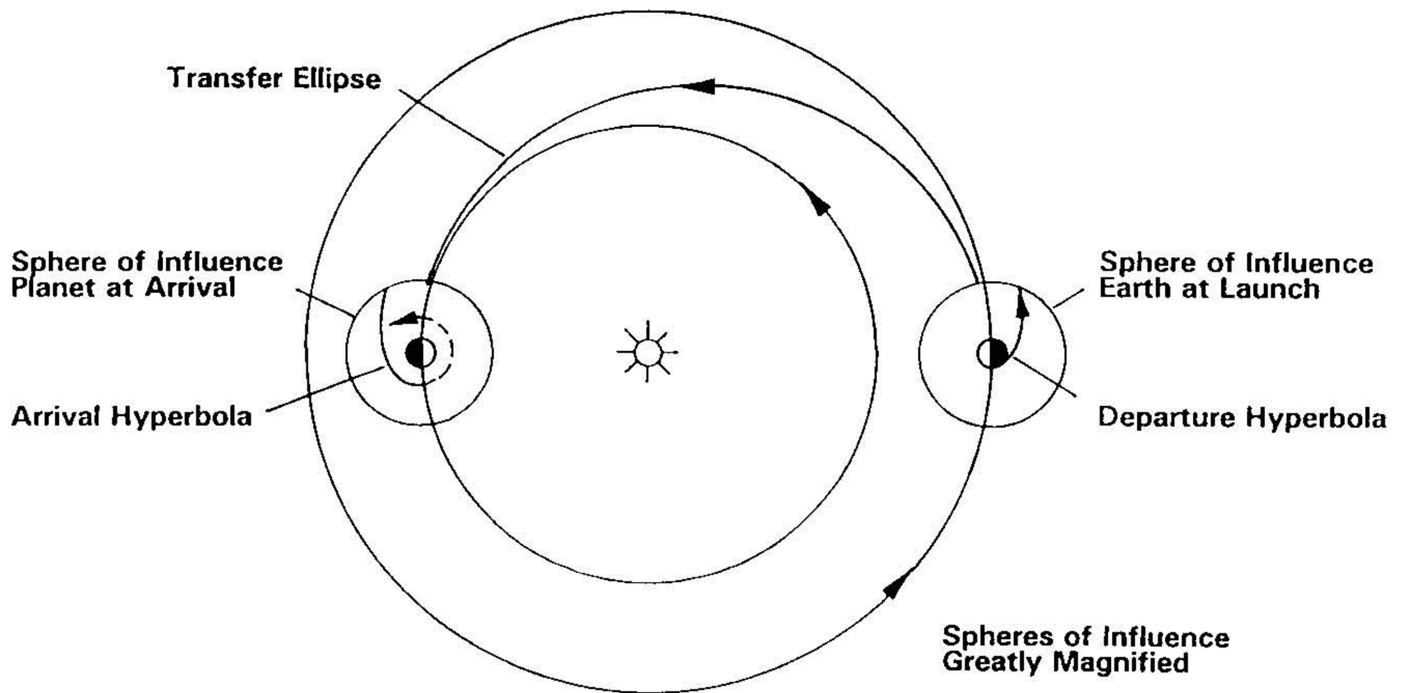


Figure 5.1: Trasferimento interplanetario basato sull'approccio delle coniche raccordate, da [2].

Le approssimazioni sulle quali si basa questa descrizione sono le seguenti: a) i raggi delle sfere d'influenza dei pianeti sono molti inferiori alle distanze interplanetarie; b) le orbite dei pianeti sono assunte circolari e complanari; c) la traiettoria descritta dal veicolo entro la sfera d'influenza del pianeta di partenza – che supponiamo essere la Terra (T) – è un'iperbole; d) la traiettoria descritta del veicolo una volta uscito dalla sfera d'influenza del pianeta di partenza, ma prima di entrare in quella del pianeta obiettivo, quindi entro la sfera d'influenza del Sole (S), è un'ellisse; e) la traiettoria descritta entro la sfera d'influenza del pianeta obiettivo (P) è ancora un'iperbole.

I raggi delle sfere d'influenza dei pianeti del sistema solare sono riportati in tab. 5.3, la quale, mediante confronto con le distanze interplanetarie riportate in tab. 5.1, conferma la validità dell'ipotesi a).

Pianeta	R_s km
Mercurio	$0{,}111 \cdot 10^6$
Venere	$0{,}616 \cdot 10^6$
Terra	$0{,}924 \cdot 10^6$
Marte	$0{,}577 \cdot 10^6$
Giove	$48{,}157 \cdot 10^6$
Saturno	$54{,}796 \cdot 10^6$
Urano	$51{,}954 \cdot 10^6$
Nettuno	$80{,}196 \cdot 10^6$
(Plutone)	$3{,}400 \cdot 10^6$

Tab. 5.3. Raggio delle sfere d'influenza dei pianeti del sistema solare.

La validità dell'ipotesi b) può essere desunta dai dati su eccentricità ed inclinazione riportati ancora in tab. 5.1; come già osservato i pianeti che più si discostano da queste assunzioni sono Mercurio e Plutone. Con riferimento agli ultimi tre punti, si assume quindi che all'interno di una sfera di influenza il veicolo risenta solo della forza esercitata dal corpo attrattore principale, trascurando quindi l'influenza degli altri corpi del sistema solare.

Consideriamo innanzitutto la prima fase, geocentrica, della traiettoria. Se il veicolo viene iniettato nella traiettoria iperbolica con una velocità v_{iniez}, ad una distanza dal centro della Terra che in prima approssimazione possiamo prendere uguale al raggio della Terra R_T (perché la quota alla quale avviene l'iniezione è piccola rispetto a R_T), la sua energia meccanica totale risulta

$$\mathcal{E}_T = \frac{v_{iniez}^2}{2} - \frac{\mu_T}{R_T} \tag{5.1}$$

La velocità $v_{s,T}$ del veicolo quando giunge al confine della sfera d'influenza della Terra (di raggio $R_{s,T}$) viene ricavata dalla conservazione dell'energia meccanica totale

$$\frac{v_{iniez}^2}{2} - \frac{\mu_T}{R_T} = \frac{v_{s,T}^2}{2} - \frac{\mu_T}{R_{s,T}} \tag{5.2}$$

Essendo il raggio della sfera d'influenza molto grande, nel caso della Terra poco meno di un milione di chilometri, vedi tab. 5.3, risulta lecito trascurare il secondo termine al secondo membro, per cui la velocità $v_{s,T}$ in questo caso viene praticamente a coincidere con la velocità in eccesso all'infinito, definita come

$$v_{\infty,T} = \sqrt{2\,\mathcal{E}_T} \tag{5.3}$$

come di conseguenza assumeremo da qui in poi. Questa circostanza è quantificata dalla fig. 5.2, la quale riporta la velocità residua del veicolo in funzione della distanza dalla Terra, per diversi valori della velocità di lancio (ideale, escluse cioè le perdite propulsive). Si può notare che effettivamente in corrispondenza della linea verticale tratteggiata, che indica il confine della sfera d'influenza della Terra,la velocità residua si è praticamente ridotta al valore asintotico per distanza infinita (linee tratteggiate orizzontali), cioè alla $v_{\infty,T}$.

Consideriamo ora la transizione, che avviene al confine della sfera d'influenza della Terra, tra la traiettoria iperbolica geocentrica, e l'ellisse di trasferimento eliocentrica. La velocità del veicolo rispetto ad un sistema eliocentrico inerziale (cioè con assi diretti secondo le stelle fisse) è data dalla composizione (vettoriale) della velocità relativa alla Terra, e della velocità della Terra nel suo moto di rivoluzione intorno al Sole:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\infty,T} + \vec{v}_T \tag{5.4}$$

Esaminiamo dapprima il caso di trasferimento alla Hohmann (ellisse di trasferimento tangente), per poi considerare anche il caso di trasferimento mediante ellisse secante.

5.2.1 Trasferimenti interplanetari alla Hohmann

In un trasferimento alla Hohmann, il punto di iniezione nell'ellisse di trasferimento ne rappresenta l'afelio per missioni verso pianeti interni (Mercurio e Venere) ed il perielio per missioni verso pianeti esterni (tutti gli altri). Quindi la (5.4) rappresenta nel primo caso una velocità all'afelio $\vec{v}_a$, nel secondo un velocità al perielio $\vec{v}_p$. Dovendo raggiungere un generico pianeta obiettivo (indice P) sito

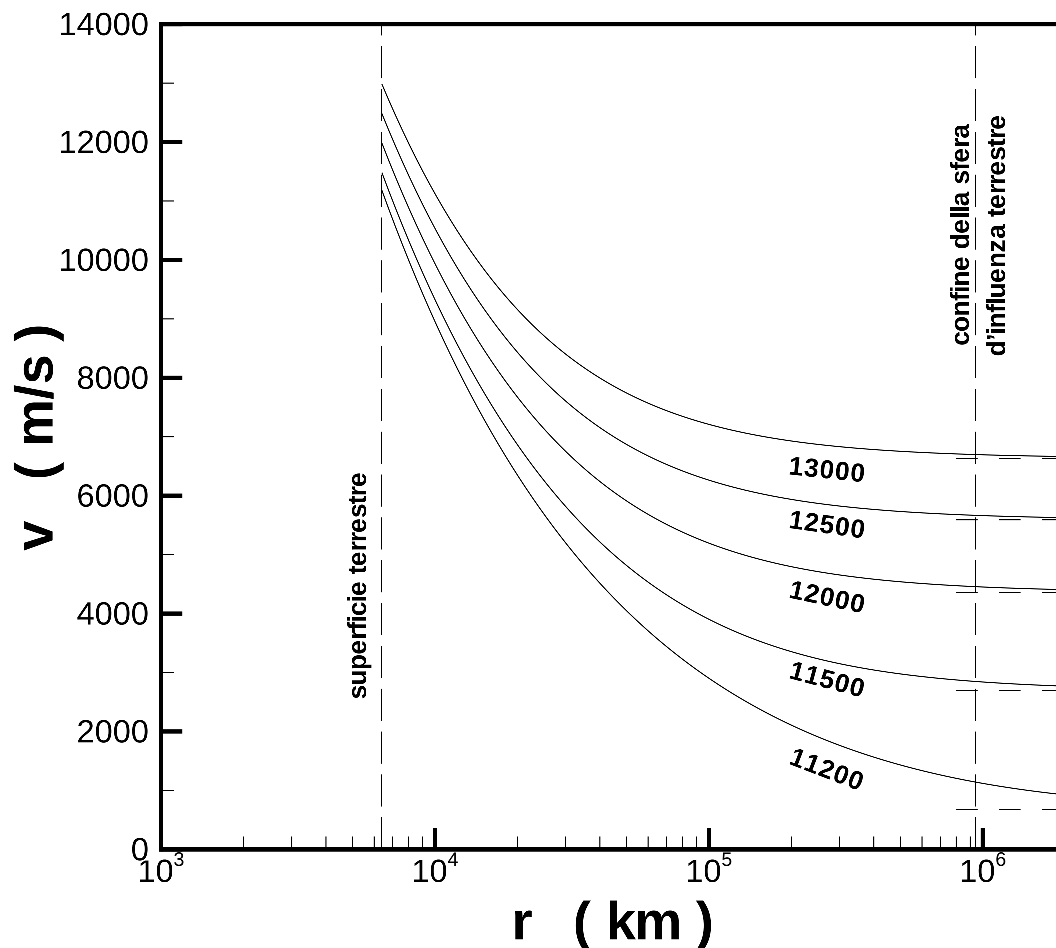


Figure 5.2: Velocità residua in funzione della distanza del centro della Terra, con la velocità di lancio dalla superficie terrestre a parametro.

su un'orbita intorno al Sole (supposta circolare) di raggio a_P, a partire dalla Terra, la cui orbita ha raggio a_T, occorre descrivere un'ellisse di trasferimento di semiasse maggiore

$$a = \frac{a_T + a_P}{2} \tag{5.5}$$

la cui energia meccanica totale risulta quindi

$$\mathcal{E}_S = -\frac{\mu_S}{2\,a} \tag{5.6}$$

La velocità che occorre pertanto avere (in un sistema eliocentrico) nel punto d'inizio dell'ellisse di trasferimento è

$$v = \sqrt{2\left(\mathcal{E}_S + \frac{\mu_S}{a_T}\right)} \begin{cases} = v_a & (P \text{ pianeta interno}) \\ = v_p & (P \text{ pianeta esterno}) \end{cases} \tag{5.7}$$

dove, come indicato, nel primo caso, che si riferisce ad un pianeta obiettivo P interno, la velocità all'inizio della semiellisse di trasferimento è quindi una velocità all'afelio di tale traiettoria, mentre nel secondo, relativo ad un pianeta obiettivo esterno, è una velocità al perielio. Si noti che nel primo caso v_a è minore della velocità di rivoluzione della Terra intorno al Sole v_T, nel secondo v_p è maggiore di v_T. La velocità in eccesso che il veicolo deve possedere (in un sistema geocentrico) al confine della sfera d'influenza della Terra deve essere pertanto tale da conseguire la velocità richiesta. Per trasferimento verso un pianeta interno, converrà che la $\vec{v}_{\infty,T}$ sia parallela ed opposta alla $\vec{v}_T$, sì da poter scrivere

$$v_a = v_T - v_{\infty,T} \tag{5.8}$$

Per trasferimento verso un pianeta esterno, converrà invece che $\vec{v}_{\infty,T}$ sia parallela ed equiversa alla $\vec{v}_T$, sì da avere

$$v_p = v_T + v_{\infty,T} \tag{5.9}$$

Le (5.8,5.9) consentono quindi di individuare il valore della velocità in eccesso che il veicolo deve possedere rispetto alla Terra per potersi inserire nell'ellisse di trasferimento desiderata; possiamo ora determinare la velocità di lancio v_{iniez} che occorre impartire dalla Terra, la quale si può ricavare dalla conservazione dell'energia meccanica totale (nel moto rispetto alla Terra)

$$\mathcal{E}_T = \frac{v_{iniez}^2}{2} - \frac{\mu}{R_T} = \frac{v_{\infty,T}^2}{2} \tag{5.10}$$

dalla quale si ricava, essendo in particolare $(2\,\mu_T/R_T)^{1/2}$ la velocità di fuga dalla Terra $v_{e,T}$,

$$v_{iniez} = \sqrt{v_{\infty,T}^2 \,+\, v_{e,T}^2} \qquad (5.11)$$

Una volta giunto all'altro estremo della semiellisse di trasferimento, il veicolo entra nella sfera d'influenza del pianeta obiettivo con una velocità che si ottiene dalla composizione vettoriale della velocità al perielio (se il pianeta obiettivo è interno) od all'afelio (se esterno) con la velocità di rivoluzione del pianeta intorno al Sole $\vec{v}_P$:

$$\begin{array}{lcll} \vec{v}_{\infty,P} & = & \vec{v}_p \,-\, \vec{v}_P & \qquad P \text{ pianeta interno} \\ \vec{v}_{\infty,P} & = & \vec{v}_a \,-\, \vec{v}_P & \qquad P \text{ pianeta esterno} \end{array}$$

dove le v_p e v_a si ricavano dalla conservazione dell'energia meccanica totale nel moto eliocentrico (5.6), in modo analogo alla (5.7):

$$v \;=\; \sqrt{2\left(\mathcal{E}_S \,+\, \frac{\mu_S}{a_P}\right)} \;\left\{ \begin{array}{ll} = \, v_p & \qquad (P \text{ pianeta interno}) \\ = \, v_a & \qquad (P \text{ pianeta esterno}) \end{array} \right. \qquad (5.12)$$

In un trasferimento alla Hohmann, l'ellisse di trasferimento è tangente all'orbita del pianeta obiettivo, per cui la (5.2.1) si può riscrivere in forma scalare (si noti che per trasferimenti verso pianeti interni la velocità della sonda al perielio dell'ellisse di trasferimento è superiore alla velocità del pianeta, per cui la $\vec{v}_{\infty,P}$ risulta concorde con le due velocità citate; per trasferimenti verso pianeti esterni invece la velocità della sonda all'afelio è inferiore alla velocità del pianeta, per cui la $\vec{v}_{\infty,P}$ risulta opposta)

$$\begin{array}{lcll} v_{\infty,P} & = & v_p \,-\, v_P & \qquad P \text{ pianeta interno} \\ v_{\infty,P} & = & v_a \,-\, v_P & \qquad P \text{ pianeta esterno} \end{array}$$

La (5.2.1) permette di individuare l'energia meccanica totale nel moto relativo al pianeta obiettivo:

$$\mathcal{E}_P = \frac{v_{\infty,P}^2}{2} \tag{5.13}$$

Chiamato $r_{p,P}$ il raggio di periabside (al momento incognito, vedi successivo par. 5.2.4) della traiettoria iperbolica di avvicinamento al pianeta, la corrispondente velocità al periabside $v_{p,P}$ si ottiene facilmente dalla conservazione dell'energia meccanica totale

$$v_{p,P} = \sqrt{2 \left(\mathcal{E}_P + \frac{\mu_P}{r_{p,P}} \right)} \tag{5.14}$$

Δv per trasferimenti interplanetari alla Hohmann

Per una missione di sorvolo (*fly–by*) o di impatto sulla superficie del pianeta, il Δv da fornire durante le varie fasi della missione è la somma della velocità di iniezione in orbita ellittica di trasferimento (5.11), detratta la velocità iniziale dovuta alla rotazione della Terra, delle perdite propulsive che si hanno in prossimità della Terra, e del Δv necessario per le inevitabili correzioni di traiettoria:

$$\Delta v_{fb} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} \tag{5.15}$$

Non abbiamo considerato in questa espressione (né in quelle che seguono) il Δv necessario per l'eventuale correzione d'inclinazione necessaria a portare il veicolo, al momento del lancio dalla Terra, sul piano dell'eclittica, in quanto dipende dall'inclinazione dell'orbita di parcheggio intorno alla Terra, e dalla data di lancio.

Nel caso si voglia invece iniettare il carico utile in un'orbita attorno al pianeta obiettivo, per esempio circolare (ma un'orbita ellittica potrebbe anch'essa essere interessante perché consente di esplorare lo spazio intorno al pianeta a varie distanze da esso), occorre aggiungere un impulso propulsivo per circolarizzare l'orbita, più le inevitabili perdite propulsive associate a questa manovra in prossimità del pianeta

$$\Delta v_{orb} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} + \Delta v_{circ} + \Delta v_{losses,P} \tag{5.16}$$

dove il Δv richiesto per circolarizzare l'orbita è la differenza tra la velocità al periabside della traiettoria iperbolica di avvicinamento (5.14) e la velocità di orbitazione circolare attorno al pianeta

$$\Delta v_{circ} \; = \; v_{p,P} \; - \; \sqrt{\frac{\mu_P}{r_{p,P}}} \tag{5.17}$$

Nel caso si voglia conseguire un atterraggio morbido occorre considerare il Δv richiesto per frenare il veicolo (cioè per compensare la velocità che questo acquisterebbe all'impatto al suolo in assenza di azioni propulsive), più le relative perdite

$$\Delta v_{soft} \; = \; \Delta v_{iniez} \; - \; v_{0,T} \; + \; \Delta v_{losses,T} \; + \; \Delta v_{corr} \; + \; (\Delta v_{brak} \; + \; \Delta v_{losses,P}) \tag{5.18}$$

Nel caso di pianeti (o altri corpi celesti come satelliti, asteroidi, comete) privi di atmosfera, il frenaggio (*braking*) dovrà necessariamente essere di natura propulsa, idealmente compreso tra gli estremi

$$\Delta v_{brak,1} \; = \; \sqrt{2 \left(\mathcal{E}_P \; + \; \frac{\mu_P}{R_P} \right)} \; - \; v_{0,P} \; = \; \sqrt{v_{\infty,P}^2 \; + \; v_{e,P}^2} \; - \; v_{0,P} \tag{5.19}$$

$$\Delta v_{brak,2} \; = \; \sqrt{2 \left(\mathcal{E}_P \; + \; \frac{\mu_P}{R_P} \right)} \; + \; v_{0,P} \; = \; \sqrt{v_{\infty,P}^2 \; + \; v_{e,P}^2} \; + \; v_{0,P} \tag{5.20}$$

a seconda del punto della superficie del pianeta prescelto per l'atterraggio (e quindi della componente di velocità dovuta alla rotazione del pianeta). Occorre tuttavia osservare che nel trasferimento verso pianeti esterni, la velocità del veicolo (rispetto ad un sistema inerziale eliocentrico) è inferiore a quella di rivoluzione del pianeta intorno al Sole, per cui in realtà è il pianeta a raggiungere il veicolo e non viceversa, il che implica che per la (5.2.1) il veicolo entra nella sfera d'influenza del pianeta (dalla parte rivolta verso il Sole) con una $\vec{v}_{\infty,P}$ diretta in senso opposto al moto di rivoluzione del pianeta, che la porta a descrivere un'iperbole che passa dietro al pianeta, e l'atterraggio avverrà necessariamente sulla faccia del pianeta opposta al Sole, per cui valgono la (5.19) per pianeti che ruotano di moto diretto, e la (5.20) per quelli che ruotano di moto retrogrado (Urano e Plutone), a

meno di non ricorrere a costose manovre per correggere la traiettoria di ingresso planetario, il che oltretutto comporta elevati angoli di ingresso nell'atmosfera, con conseguenti fortissime decelerazioni ed elevatissimi carichi termici, vedi cap. 6. Ad ogni modo, una valutazione più precisa deve anche tener conto dell'inclinazione dell'asse di rotazione del pianeta rispetto all'eclittica. Per pianeti interni esiste una maggiore libertà nella definizione delle condizioni di avvicinamento al pianeta (perché in questo caso è effettivamente il veicolo a raggiungere il pianeta), ma in questo caso le velocità di rotazione del pianeta sono talmente basse da poter essere trascurate nel calcolo del Δv di frenaggio, nel contesto delle approssimazioni sin qui introdotte. Nel caso di pianeti dotati di atmosfera sufficientemente densa, questa può essere sfruttata per frenare il veicolo (attraverso corpi di forma non aerodinamica o *blunt bodies*, superfici portanti, paracadute, ...), risparmiando in tal modo il Δv di frenaggio e le relative perdite, per quanto può essere sempre necessario fornire un qualche Δv per guidare la discesa ed assicurare il contatto morbido con il suolo.

Per missioni di andata e ritorno per un pianeta, occorre considerare le perdite per la correzione della traiettoria in entrambi i sensi, l'eventuale Δv per frenaggio in prossimità del pianeta obiettivo con le associate perdite (se non si ricorre al frenaggio atmosferico), più il Δv di lancio dal pianeta nella fase di ritorno, che si ottiene in modo analogo alla (5.11), nota la velocità in eccesso che è necessario fornire al veicolo, ancora data dalla (5.2.1); bisogna evidentemente tener conto nelle perdite propulsive durante questa fase in prossimità del pianeta, e poi del recupero della velocità di rotazione del pianeta. Se supponiamo che il lancio dal pianeta avvenga lungo l'equatore nella direzione della velocità di rotazione, si ha quindi

$$\Delta v_{a/r} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + 2\,\Delta v_{corr} + (\Delta v_{brak} + \Delta v_{losses,P}) +$$

$$+ \sqrt{v_{\infty,P}^2 + v_{e,P}^2} - v_{0,P} + \Delta v_{losses,P} \qquad (5.21)$$

Non abbiamo considerato in questa espressione il Δv necessario per l'eventuale correzione d'inclinazione necessaria a portare il veicolo, al momento del lancio dal pianeta, sul piano dell'eclittica, in quanto dipende ancora dall'inclinazione dell'orbita di parcheggio intorno al pianeta, e dalla data di lancio.

Nella tab. 5.4 sono riportati i Δv ed i tempi di trasferimento per i vari tipi di missione descritti sopra per tutti i pianeti del sistema solare.

Pianeta	Δv_{iniez} m/s	Δv_{circ} m/s	Δv_{brak} m/s	$\Delta v_{a/r}$ m/s	T_{trasf}
Mercurio	13476	7546	10507	34489	106 d
Venere	11455	3261	(10725)	22176	146 d
Marte	11560	2087	(5450)	17010	259 d
Giove	14215	16911	(47145)	61360	2,737 a
Saturno	15180	10344	(25622)	40802	6,042 a
Urano	15869	6485	(24334)	35219	16,045 a
Nettuno	16135	6952	(21693)	37829	30,597 a
(Plutone)	16253	3045	3881	23988	45,762 a

Tab. 5.4. Requisiti propulsivi ideali di vari tipi di missioni interplanetarie.

I Δv riportati in tabella sono ideali, non sono cioè comprensivi delle perdite propulsive e delle manovre di correzione della traiettoria; non si è poi tenuto conto del recupero della velocità di rotazione terrestre. Il Δv di frenaggio per atterraggio morbido è stato posto tra parentesi per i pianeti dotati di atmosfera, e per questi stessi pianeti non è stato incluso nel computo del Δv per missione di andata e ritorno. Si è poi assunto frenaggio atmosferico in ogni caso al ritorno sulla Terra. Per la circolarizzazione, si è assunta un'orbita di raggio pari ad 1,1 volte il raggio del pianeta. Il tempo di trasferimento è calcolato come

$$T_{trasf} = \frac{\pi \, a^{3/2}}{\sqrt{\mu_S}} \qquad (5.22)$$

prendendo dunque in considerazione la sola semiellisse eliocentrica, il cui tempo di percorrenza è di gran lunga preponderante rispetto a quelli degli archi di iperbole descritti entro le sfere d'influenza dei pianeti.

I dati riportati in tab. 5.4 sono anche visualizzati separatamente per ogni grandezza, sotto forma di istogrammi nelle figure seguenti (dove evidentemente nella legenda Me sta per Mercurio, Ve per Venere, Ma per Marte, Gi per Giove, Sa per Saturno, Ur per Urano, Ne per Nettuno, Pl per Plutone).

La fig. 5.3 riporta i Δv per iniezione in orbita di trasferimento (esclusi, come detto, i contributi per perdite propulsive, ed il recupero della velocità dovuta alla rotazione della Terra). Si può notare che la velocità di iniezione richiesta ha un minimo per i pianeti più vicini alla Terra (in quanto sono minori le correzioni di velocità richieste per inserimento nell'ellisse di trasferimento), mentre cresce

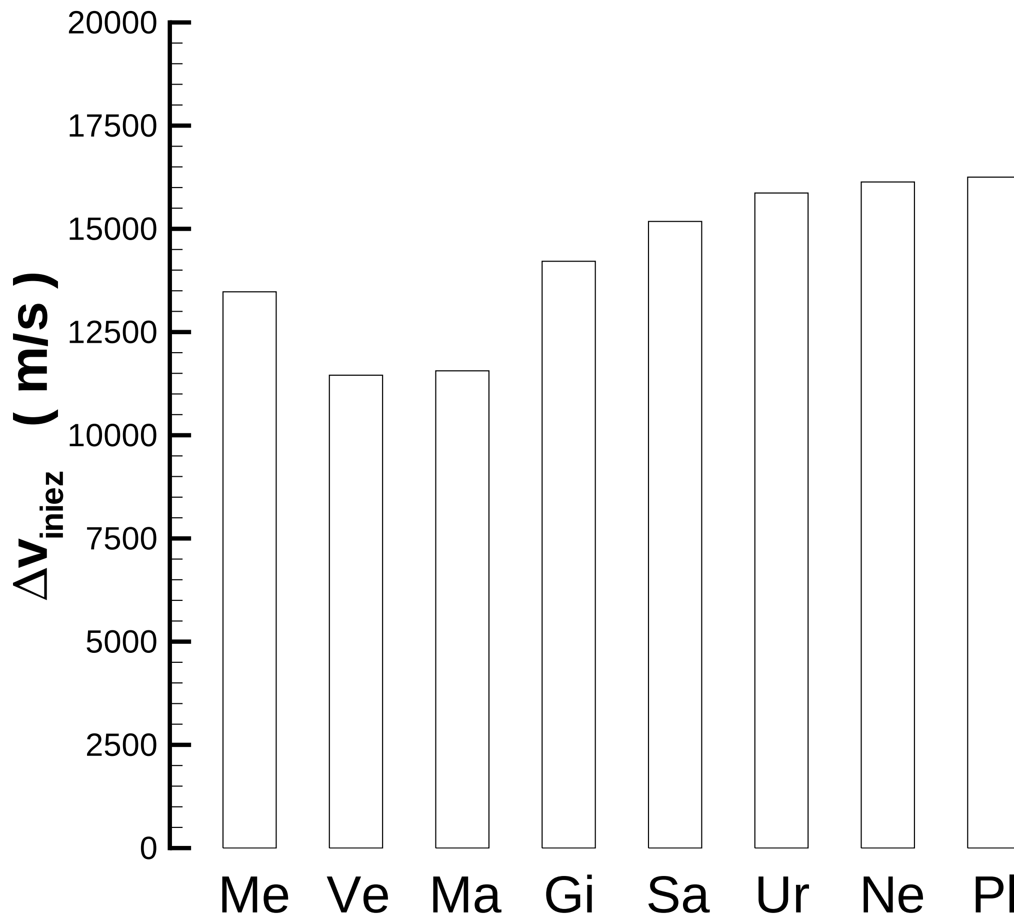


Figure 5.3: Δv di lancio (dalla superficie terrestre) per iniezione in orbita ellittica di trasferimento tangente.

per i pianeti esterni tendendo ad avvicinarsi asintoticamente al valore della velocità di lancio richiesto per la fuga dal sistema solare, pari a circa 16650 m/s, vedi [1], par. 2.10.

La fig. 5.4 riporta i Δv per inserimento in orbita circolare attorno al pianeta obiettivo, di raggio pari ad 1,1 volte il raggio di quest'ultimo. Questo Δv dipende in modo cruciale dal valore della costante di potenziale di sorgente del pianeta (cioè dalla sua massa); è percio molto elevato per pianeti molto massicci (Giove, Saturno).

La fig. 5.5 riporta i Δv per atterraggio morbido, calcolati senza prevedere frenaggio atmosferico.

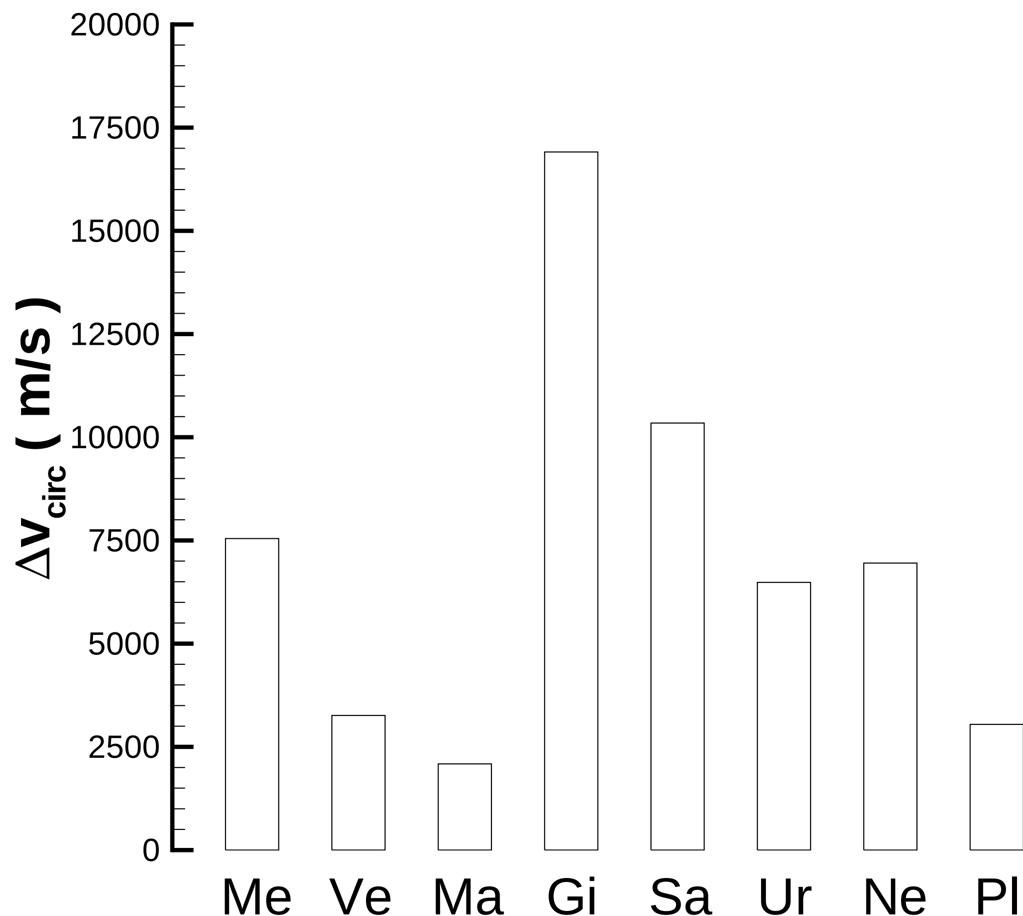


Figure 5.4: Δv di inserimento in orbita planetaria di raggio pari a 1,1 volte il raggio del pianeta, per trasferimento tangente.

I dati risultano perciò strettamente significativi solo per Mercurio e Plutone, per gli altri pianeti (dotati di atmosfera) servono in primo luogo a dare un'idea dell'energia cinetica che occorre dissipare grazie alla resistenza atmosferica, con conseguenti problemi di decelerazione e scambio termico, vedi anche cap. 6, ed in secondo luogo a quantificare il Δv che occorre impartire al veicolo nel caso di un'eventuale missione di ritorno, considerata sotto. Si noti che è stata utilizzata la (5.19) per pianeti che ruotano di moto diretto, e la (5.20) per pianeti che ruotano di moto retrogrado.

La fig. 5.6 riporta i Δv complessivi per missioni di andata e ritorno per i differenti pianeti, calcolati senza tener conto delle perdite propulsive né dei requisiti propulsivi per correzioni di traiettoria.

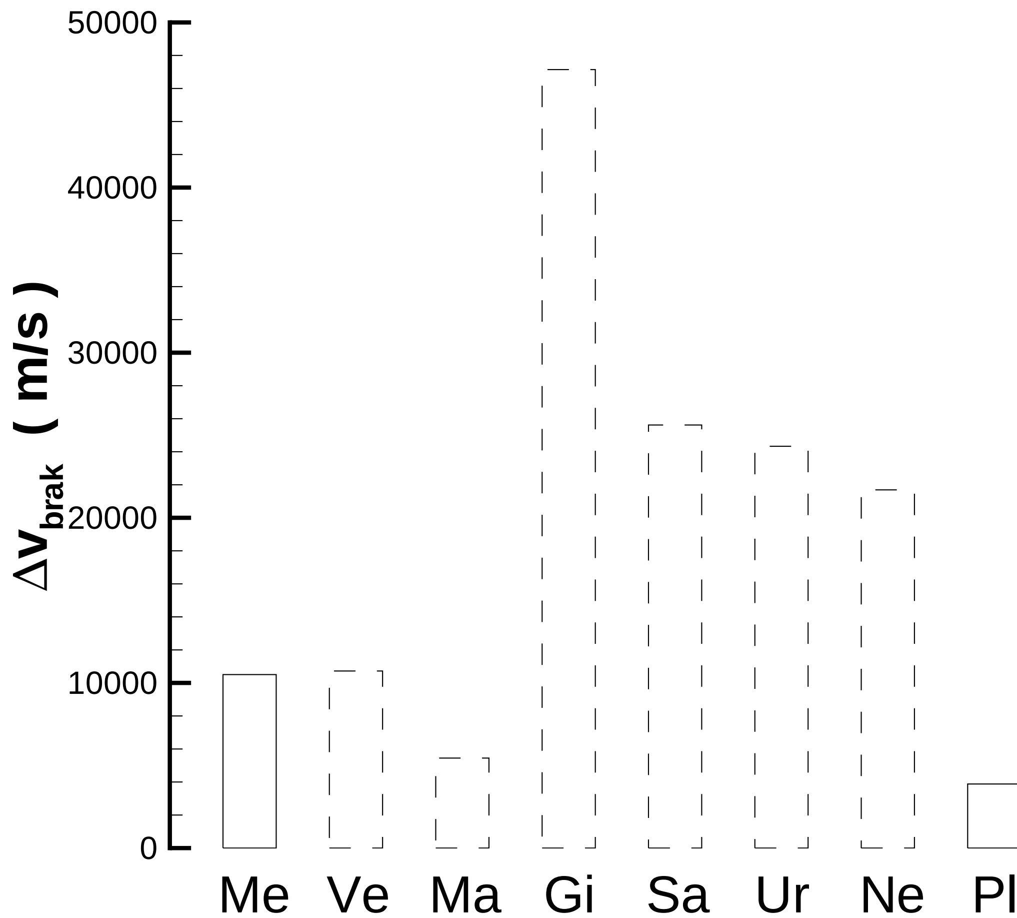


Figure 5.5: Δv per atterraggio morbido sulla superficie del pianeta (tratteggiato per pianeti dotati di atmosfera), per trasferimento tangente.

Per l'atterraggio morbido sul pianeta è stato previsto frenaggio atmosferico per i pianeti dotati di atmosfera, ed anche al rientro sulla Terra, in ogni caso.

La fig. 5.7 riporta i tempi di trasferimento sulla semiellisse (quindi, tempi di sola andata). Si nota subito come questi tempi diventano molto notevoli per i pianeti più lontani. Ricordiamo che il trasferimento alla Hohmann è la manovra più economica, cioè che richiede il minimo Δv (almeno nel caso in cui il raggio dell'orbita del pianeta obiettivo sia minore di circa 15,58 volte il raggio dell'orbita del pianeta di partenza), ma è anche quello che richiede il più lungo tempo di trasferimento. Per pianeti con orbite di raggio maggiore di 15,58 AU (Urano, Nettuno, Plutone) sarebbe più economica una

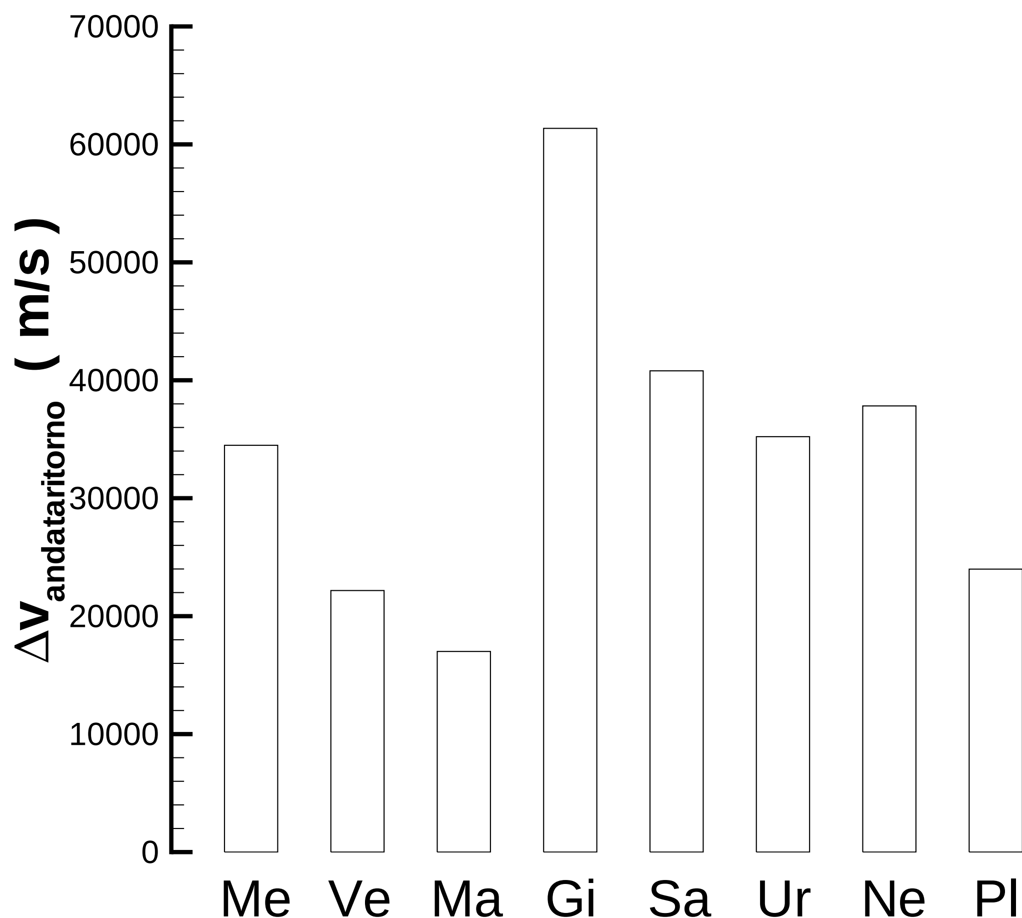


Figure 5.6: Δv per missione di andata e ritorno, per trasferimento tangente.

manovra biellittica, vedi par. 3.1.1, ma i tempi di trasferimento diventerebbero ancora più lunghi. Si noti che tempi di missione oltre i dieci anni non sono proponibili, sia perché è ipotizzabile che nell'arco di periodi così si abbiano progressi tecnologici tali da consentire il lancio di una sonda che 'sorpassi' quella lanciata in precedenza, sia perché diciamo tali missioni non risulterebbero 'spendibili' politicamente. Per quanto riguarda invece i pianeti più vicini, per i quali i tempi di trasferimento sembrano accettabili, bisogna però tener conto che nel caso di eventuali missioni umane di esplorazione di questi pianeti, essi comportano comunque una lunga esposizione dell'equipaggio ai raggi cosmici, che può andare oltre i limiti accettabili. Ne deriva in ogni caso un interesse per profili di missione alternativi, che consentano di abbreviare i lunghi tempi dei trasferimenti alla Hohmann.

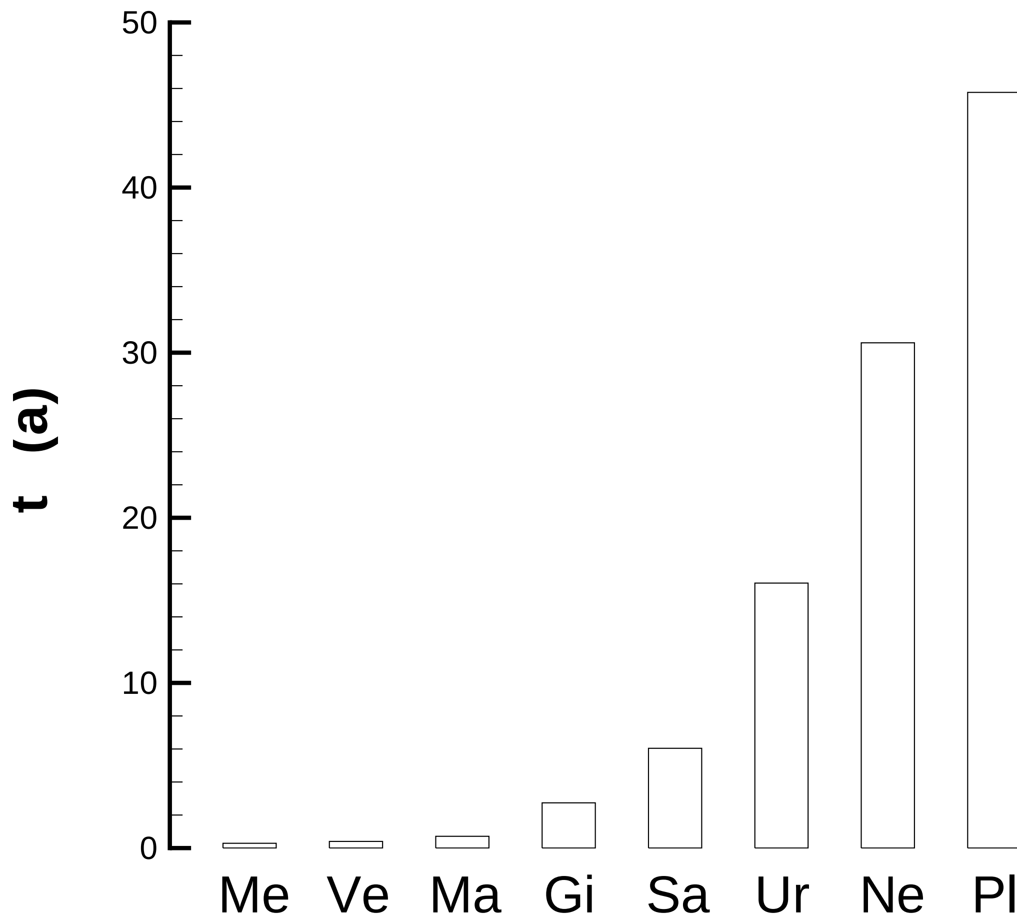


Figure 5.7: Tempi di trasferimento su una semiellisse tangente.

Vogliamo ora dare un'idea dei Δv complessivi effettivamente richiesti da una missione reale, che tenga quindi conto anche le perdite e le correzioni sinora trascurate, riferendoci per praticità ad una missione verso il pianeta Marte. Possiamo quantificare le perdite propulsive nella fase di ascesa dalla Terra in circa 1800 m/s, per quanto visto nel par. 2.1.4, ed il Δv richiesto per le correzioni di traiettoria lungo l'ellisse di trasferimento (e l'iperbole di avvicinamento) in circa 200 m/s. Supponiamo che il lancio dalla Terra avvenga in direzione est da una base equatoriale, per cui si recupera tutta la velocità dovuta alla rotazione della Terra. Per una missione di sorvolo (*fly–by*) o impatto i requisiti propulsivi sono quindi

$$\Delta v_{fb} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} \simeq 11560 - 465 + 1800 + 200 \simeq 13100 \text{ m/s} \quad (5.23)$$

Per una missione di inserimento in un'orbita circolare di raggio pari ad 1,1 volte il raggio di Marte (quindi di alteza 339 km, vedi tab. 5.2) il Δv complessivamente richiesto risulta

$$\Delta v_{orb} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} + \Delta v_{circ} + \Delta v_{losses,P} \simeq$$

$$\simeq 11560 - 465 + 1800 + 200 + 2100 + 300 \simeq 15300 \text{ m/s} \quad (5.24)$$

avendo individuato il Δv di circolarizzazione dalla (5.17), e stimato le perdite propulsive in prossimità di Marte in circa 300 m/s. Per una missione di atterraggio morbido possiamo ancora stimare

$$\Delta v_{soft} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + \Delta v_{corr} \simeq \Delta v_{fb} \simeq 13100 \text{ m/s} \quad (5.25)$$

avendo supposto di adottare frenaggio atmosferico. Va notato che l'atmosfera di Marte è molto tenue, tuttavia a causa della debole gravità la sua densità decresce con la quota più lentamente rispetto a quanto avviene sulla Terra, per cui al disopra di una certa quota è addirittura più densa di quella terrestre, vedi anche successive (6.11,6.13). Per una missione di andata e ritorno dobbiamo applicare le correzioni di traiettoria in entrambi i sensi, per cui il Δv relativo raddoppia, mentre la velocità di lancio dalla superficie di Marte è individuabile[13] dalla tab. 5.4 in 5691 m/s, ai quali va sottratta la velocità dovuta alla rotazione intorno all'asse (supponendo al ritorno un lancio dall'equatore marziano, nel senso della rotazione del pianeta), per cui si ha

$$\Delta v_{a/r} = \Delta v_{iniez} - v_{0,T} + \Delta v_{losses,T} + 2\,\Delta v_{corr} + \sqrt{v_{\infty,P}^2 + v_{e,P}^2} - v_{0,P} + \Delta v_{losses,P} \simeq$$

$$\simeq 11560 - 465 + 1800 + 400 + 5691 - 241 + 700 \simeq 19500 \text{ m/s} \quad (5.26)$$

avendo stimato le perdite propulsive nella fase di lancio dalla superficie marziana in circa 700 m/s. Come si vede il Δv complessivo per una missione di andata e ritorno è alquanto elevato, e porta di conseguenza a rapporti di carico utile molto piccoli.

[13]Si ricordi che, in base alla(5.19), il Δv di frenaggio è stato calcolato sottraendo alla velocità d'impatto, 5691 m/s, la velocità dovuta alla rotazione del pianeta, 241 m/s.

5.2.2 Trasferimenti interplanetari mediante arco di ellisse secante

Una strategia che consente di ridurre i tempi di trasferimento rispetto a quelli di una missione alla Hohmann, è quella di una missione che utilizza come traiettoria di trasferimento interplanetaria, anziché un'ellisse tangente ad entrambe le orbite planetarie (di partenza e di arrivo, supposte circolari), un'ellisse ancora tangente all'orbita del pianeta di partenza ma secante l'orbita del pianeta obiettivo, come indicato in fig. 5.8 per il caso del pianeta Marte.

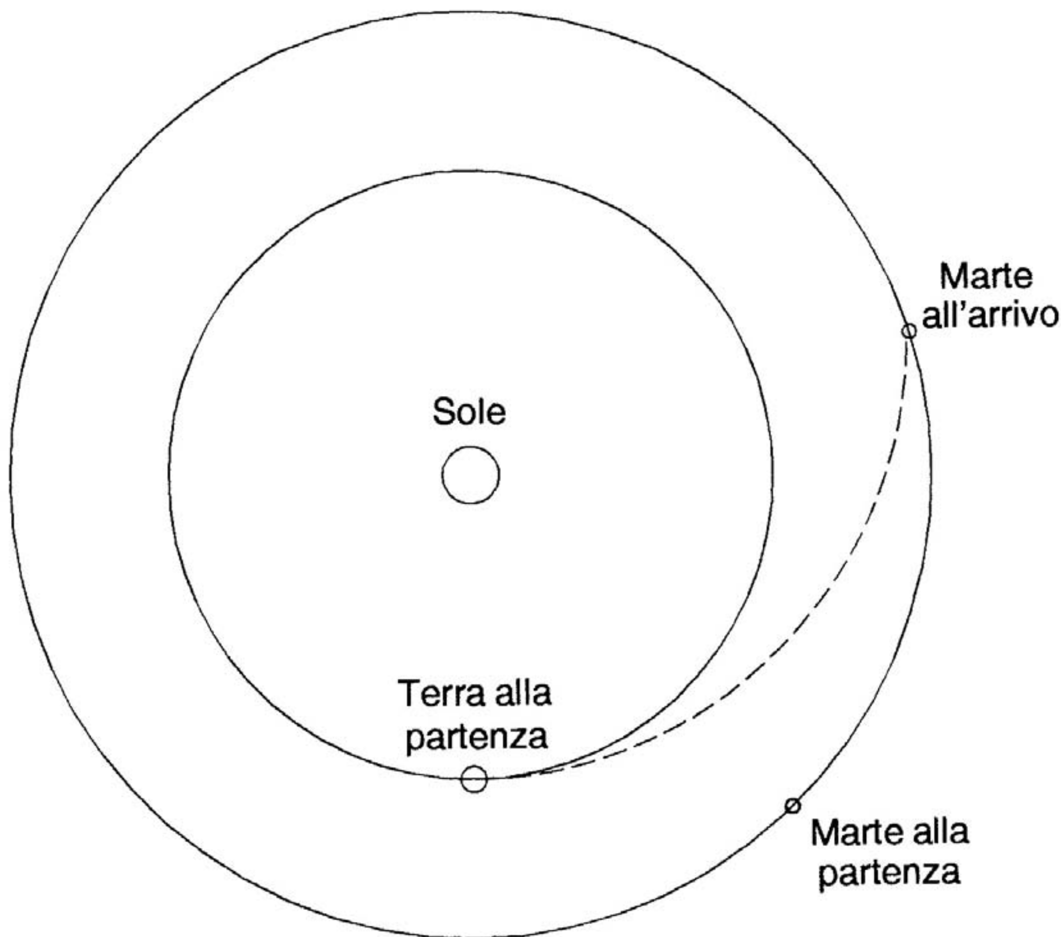


Figure 5.8: Trasferimento verso pianeta esterno mediante ellisse secante.

In questo caso la velocità di iniezione v_{iniez} costituisce la variabile indipendente (cioè che può essere assegnata a piacere, purché ovviamente maggiore del valore minimo relativo al trasferimento alla

Hohmann), mentre la variabile dipendente è il tempo di trasferimento T_{trasf}. Supponendo quindi di dare al veicolo una velocità di lancio v_{iniez}, esso arriverà al confine della sfera d'influenza della Terra con una velocità che è sostanzialmente la velocità in eccesso, ricavabile dalle (5.1, 5.3) come

$$v_{\infty,T} \;=\; \sqrt{\Delta v_{iniez}^2 \,-\, v_{e,T}^2} \tag{5.27}$$

La velocità al perielio dell'ellisse di trasferimento, sotto l'ipotesi citata che essa sia tangente all'orbita del pianeta di partenza, risulta data quindi dalla (5.9); le costanti di tale orbita eliocentrica si determinano perciò come, vedi [1], par. 1.8

$$\mathcal{E}_S \;=\; \frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_S}{a_T} \tag{5.28}$$

$$\hat{h}_S \;=\; a_T\, v_p \tag{5.29}$$

$$p \;=\; \frac{\hat{h}_S^2}{\mu_S} \tag{5.30}$$

dalle quali è possibile ricavare il valore del semiasse maggiore dell'ellisse di trasferimento, e della sua eccentricità

$$a \;=\; -\,\frac{\mu_S}{2\,\mathcal{E}_S} \tag{5.31}$$

$$e \;=\; 1 \,-\, \frac{a_T}{a} \tag{5.32}$$

Per determinare il tempo di volo, dobbiamo innanzitutto determinare l'anomalia vera del veicolo alla partenza ed all'arrivo. La prima è senz'altro nulla per missioni verso pianeti esterni, perché il veicolo viene iniettato nell'orbita di trasferimento al perielio, mentre è 180º per missioni verso pianeti interni, per i quali il punto d'iniezione è l'afelio dell'ellisse; questo secondo caso è tuttavia meno interessante (in quanto i tempi di volo verso i pianeti interni sono comunque contenuti, per cui non c'è bisogno di

ricorrere ad un trasferimento mediante ellisse secante), e non sarà più considerato nel seguito. Resta da determinare l'anomalia vera del punto di arrivo, cioè del punto il cui la distanza del veicolo dal centro di attrazione (il Sole) eguaglia il raggio a_P dell'orbita del pianeta obiettivo; essa si ricava dalla

$$\cos\nu \;=\; \frac{p \,-\, a_P}{e\, a_P} \tag{5.33}$$

L'anomalia eccentrica E è legata a quella vera dalla relazione, vedi [1], par. 2.7

$$\cos E \;=\; \frac{e \,+\, \cos\nu}{1 \,+\, e\, \cos\nu} \tag{5.34}$$

la quale permette di ricavare il tempo di volo, cioè il tempo di trasferimento, come

$$T_{trasf} \;=\; \frac{E \,-\, e \sin E}{n} \tag{5.35}$$

essendo n il moto medio della sonda sulla sua orbita ellittica

$$n \;=\; \frac{\sqrt{\mu_S}}{a^{3/2}} \tag{5.36}$$

Per quanto riguarda le condizioni all'arrivo, l'angolo di volo (che, a differenza di quanto avviene in un trasferimento alla Hohmann, in questo caso *non* è nullo) si ricava come

$$\tan\gamma \;=\; \frac{e\, \sin\nu}{1 \,+\, e\, \cos\nu} \tag{5.37}$$

La velocità all'arrivo sull'ellisse si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica totale

$$v_{arr} = \sqrt{2\left(\mathcal{E}_S + \frac{\mu_S}{a_P}\right)} \tag{5.38}$$

e la velocità relativa al pianeta all'ingresso della sua sfera d'influenza si ricava dal teorema del coseno di Carnot

$$v_{\infty,P} = \sqrt{v_{arr}^2 + v_P^2 - 2\, v_{arr}\, v_P\, \cos\gamma} \tag{5.39}$$

Si possono poi applicare le espressioni già viste per il caso di trasferimento alla Hohmann per ricavare il Δv di circolarizzazione, di atterraggio morbido, etc.

Δv per trasferimenti interplanetari mediante ellisse secante

Riportiamo in questo paragrafo i Δv richiesti per missioni interplanetarie conseguite mediante trasferimento con ellisse secante, in funzione del tempo di trasferimento; per quanto detto, ci limitiamo a considerare missioni verso pianeti esterni. Come per i trasferimenti alla Hohmann, i dati sui Δv non sono comprensivi delle perdite propulsive e delle manovre di correzione della traiettoria, e non si è poi tenuto conto del recupero della velocità di rotazione terrestre. Si è assunto frenaggio atmosferico per i pianeti dotati di atmosfera, e propulso per quelli che ne sono privi (Plutone). Per la circolarizzazione, si è assunta un'orbita di raggio pari ad 1,1 volte il raggio del pianeta.

La fig. 5.9 riporta il Δv di lancio dalla superficie terrestre per iniezione in orbita di trasferimento ellittica secante, in funzione del tempo di trasferimento desiderato. Si può osservare come la riduzione di tale tempo richieda, ovviamente, una velocità di lancio più alta. La velocità di lancio è limitata in questo grafico al valore per il quale si ha la fuga dal sistema solare, circa 16650 m/s, vedi [1], par. 2.10. È senz'altro possibile abbreviare ulteriormente i tempi di trasferimento utilizzando velocità di iniezione più alte, ma la traiettoria di trasferimento eliocentrica sarebbe un'iperbole anziché un'ellisse, il che richiede una trattazione lievemente diversa.

La fig. 5.10 riporta in particolare, per maggiore chiarezza, la stessa grandezza per il pianeta Marte. Come si può vedere, il tempo di trasferimento può essere ridotto dai circa otto mesi e mezzo necessari per trasferimento alla Hohmann, fino a circa due mesi e mezzo aumentando il Δv di lancio. Questo però suggerisce, per mantenere un rapporto di massa accettabile, di adottare un sistema propulsivo che fornisca una velocità efficace d'uscita superiore a quella dei propulsori chimici, come per esempio endoreattori termici nucleari.

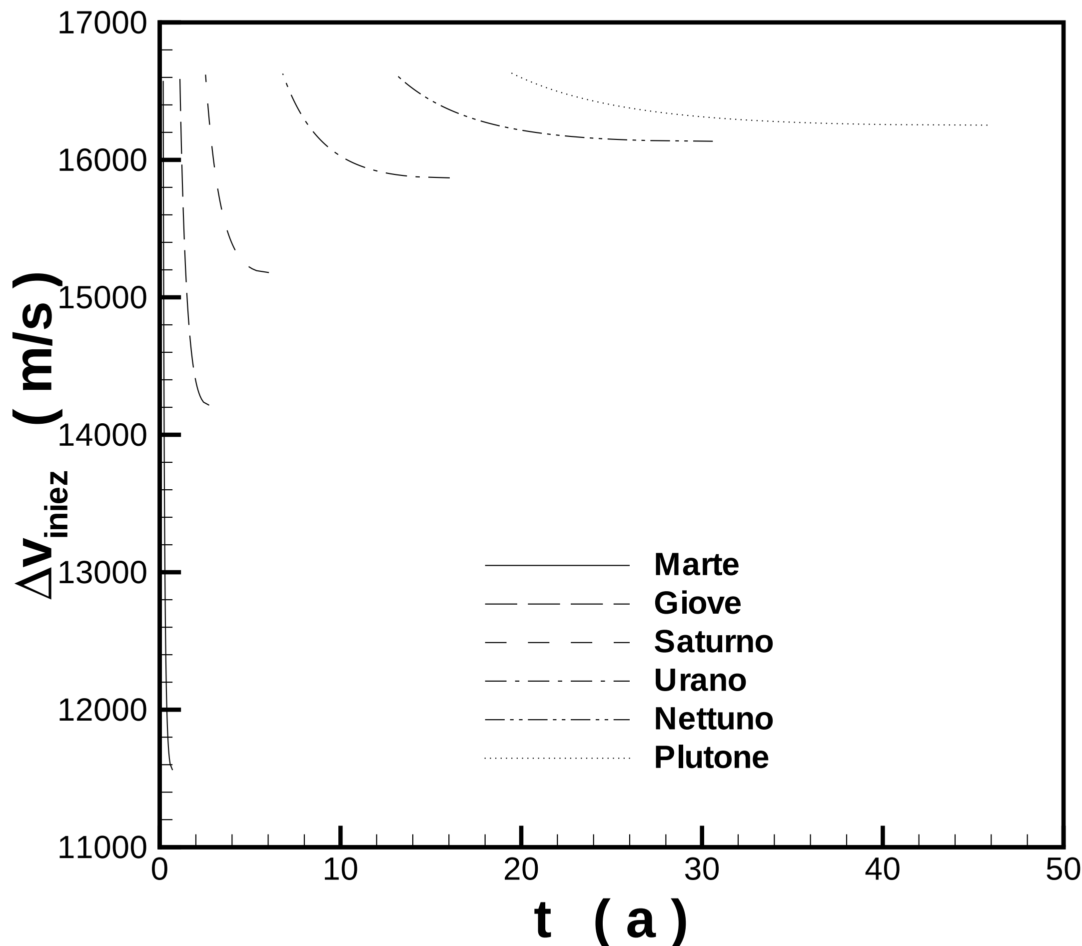


Figure 5.9: Δv di lancio (dalla superficie terrestre) per iniezione in orbita ellittica di trasferimento secante.

La fig. 5.11 riporta i Δv per inserimento in orbita circolare attorno al pianeta obiettivo, di raggio pari ad 1,1 volte il raggio di quest'ultimo, in funzione del valore del tempo di trasferimento prescelto. Si può notare, specie per i pianeti più vicini, un sensibile incremento dei Δv richiesti a tal fine (rispetto al trasferimento alla Hohmann), in quanto in un trasferimento mediante ellisse secante il veicolo arriva in prossimità del pianeta obiettivo con una velocità sensibilmente più alta di quella che si ha in un trasferimento mediante ellisse tangente.

La fig. 5.12 riporta i Δv per atterraggio morbido, calcolati prevedendo frenaggio atmosferico per i pianeti dotati di atmosfera, e propulso per gli altri. Come per il caso di trasferimento alla Hohmann,

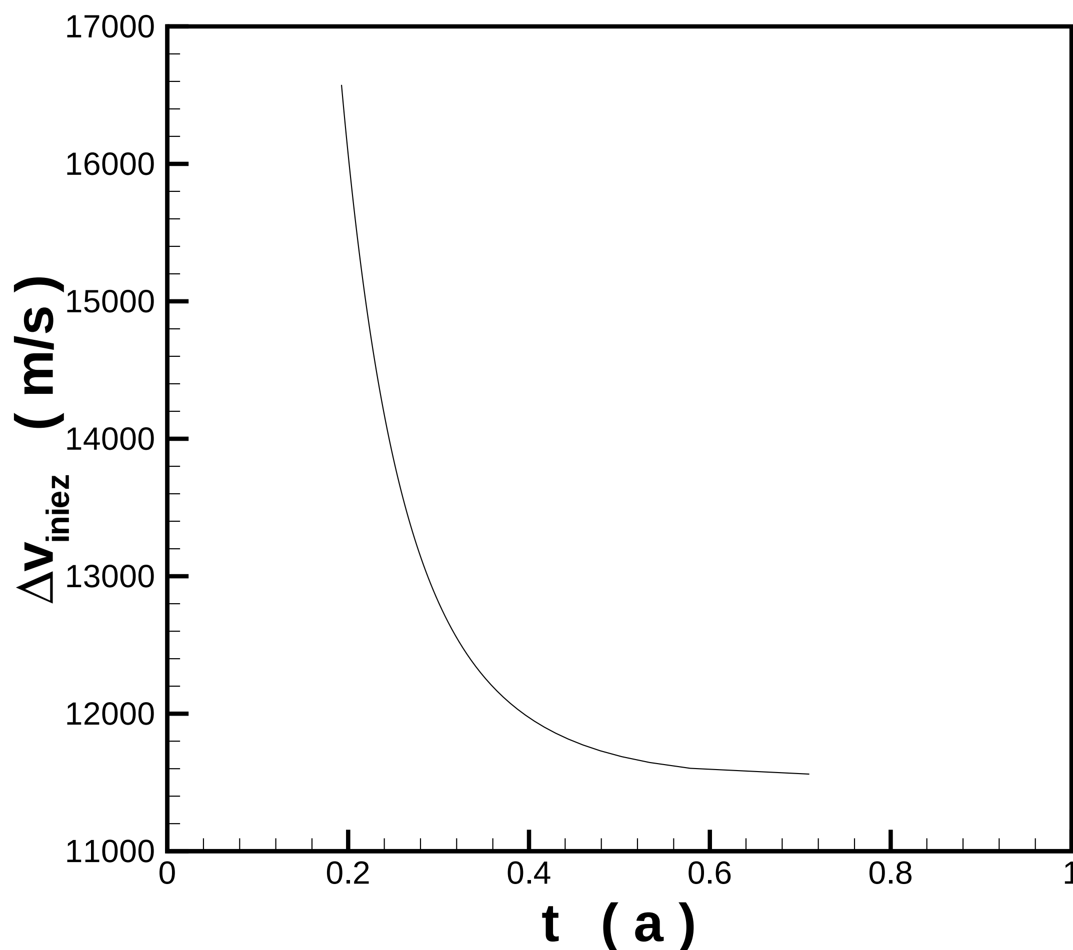


Figure 5.10: Δv di lancio (dalla superficie terrestre) per iniezione in orbita ellittica di trasferimento secante verso Marte.

è stata utilizzata la (5.19) per pianeti che ruotano di moto diretto, e la (5.20) per pianeti che ruotano di moto retrogrado. Anche in questo caso si nota un incremento del Δv richiesto (rispetto al trasferimento alla Hohmann), particolarmente significativo per i pianeti più vicini, per gli stessi motivi addotti per la fig. 5.11.

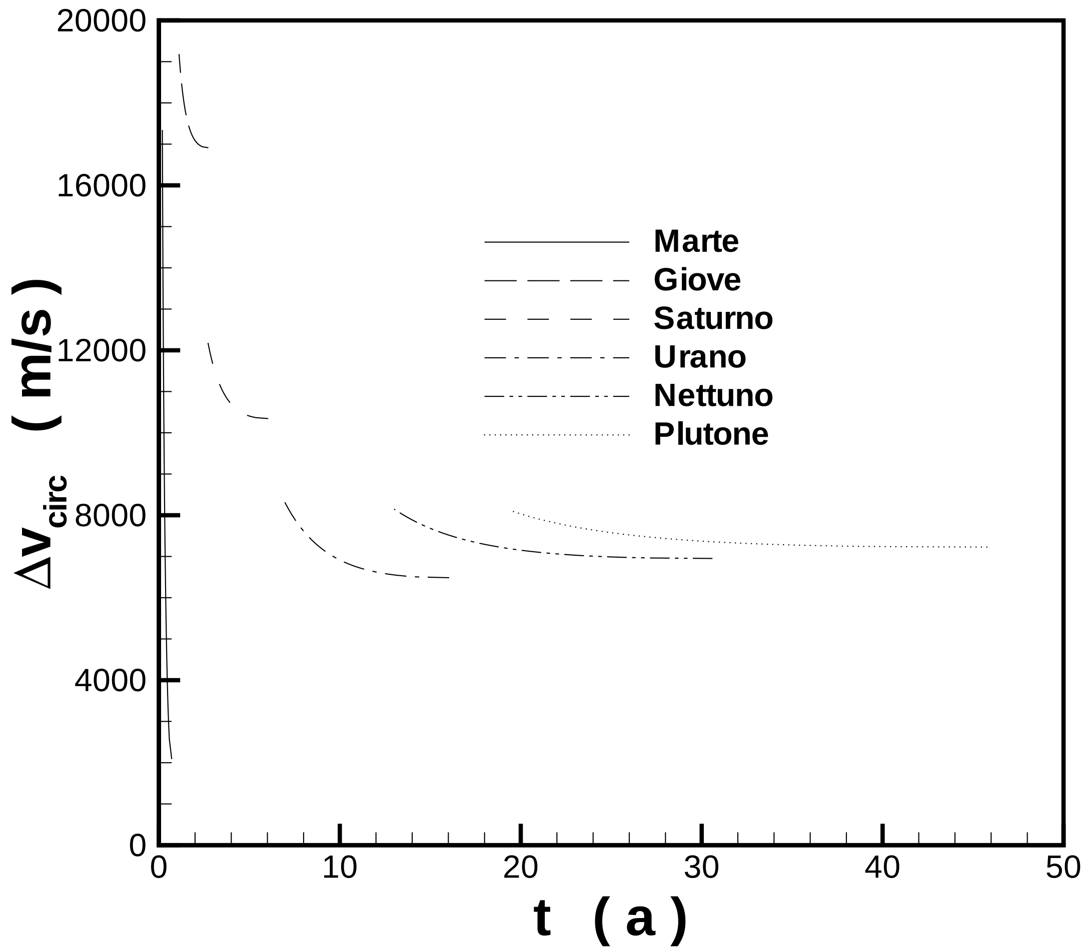


Figure 5.11: Δv di circolarizzazione (orbita ellittica di trasferimento secante).

5.2.3 Produzione di propellente *in situ*

Come si può vedere dalla tab. 5.4 e dalla fig. 5.6 (per trasferimento tangente), le missioni interplanetarie di andata e ritorno implicano Δv molto elevati, ai quali necessariamente corrispondono rapporti di carico utile λ molto piccoli. Per contenere questo inconveniente, si è pensato di produrre i propellenti per la missione di ritorno utilizzando le risorse disponibili sul pianeta (*In Situ Propellant Production*, ISPP).

Ad esempio, nel caso di missioni sul pianeta Marte, si può pensare di sfruttare i componenti

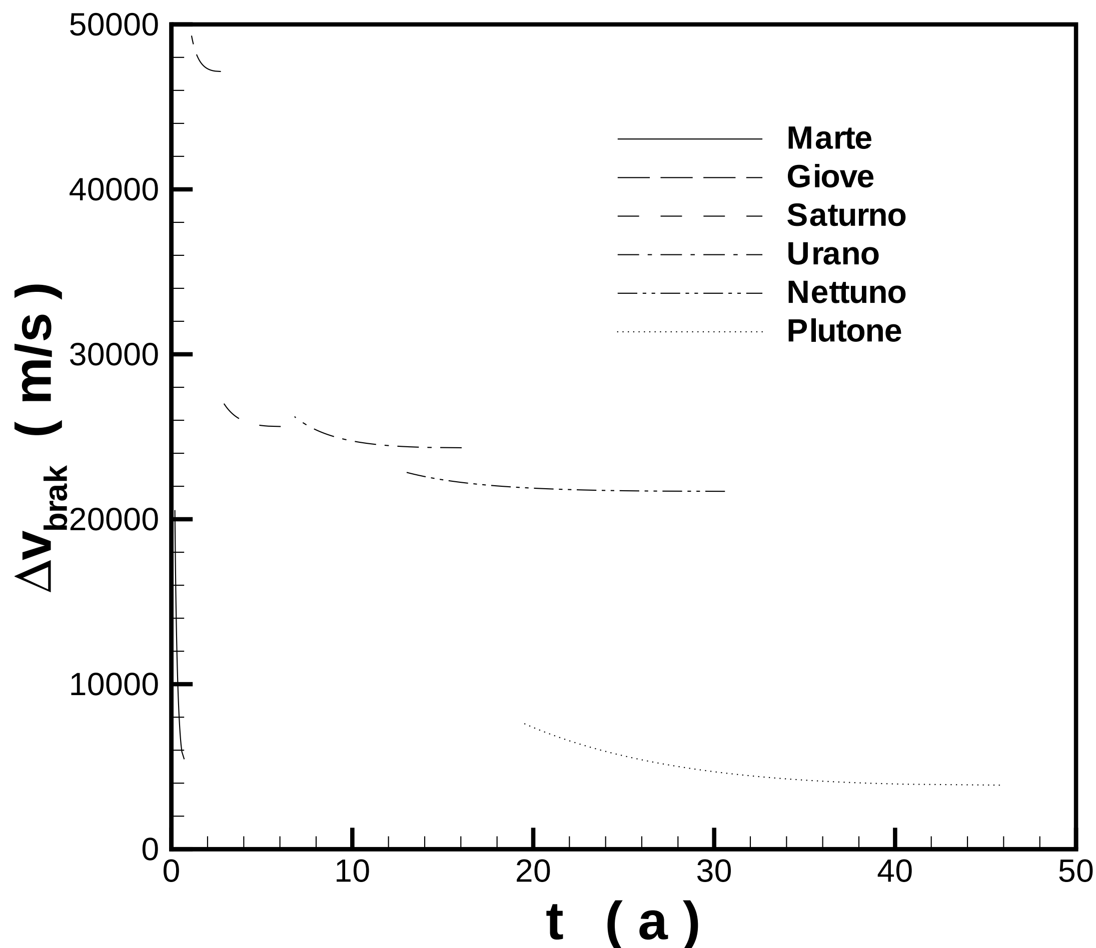


Figure 5.12: Δv di atterraggio morbido (orbita ellittica di trasferimento secante).

dell'atmosfera marziana, composta per il 95% di CO_2, poi per il 0,13% di O_2, etc., per produrre propellenti. Sono ipotizzabili tre combinazioni ossidante/combustibile (ovviamente tutti da stivare nei serbatoi allo stato liquido):

1. O_2/CO, entrambi ottenuti per esempio dalla decomposizione termica della CO_2 marziana. Tale combinazione di propellenti tuttavia è in grado di dare velocità efficaci di uscita molto limitate, dell'ordine dei 2500 m/s nel vuoto, per cui porta a rapporti di massa piuttosto piccoli, ossia a stadi di grande massa. Si può pensare di utilizzarla per l'iniezione in un'orbita di parcheggio intorno a Marte (la quale richiede un Δv ideale di circa 3500 m/s, cui vanno aggiunte le perdite

e sottratta la velocità iniziale dovuta alla rotazione del pianeta), vedi tab. 5.2, ma non per l'iniezione nella semiellisse di ritorno, per la quale si richiedono circa 5700 m/s (più le perdite, meno la velocità iniziale), vedi tab. 5.4;

2. O_2/CH_4, la quale garantisce una velocità efficace d'uscita nel vuoto intorno ai 3600 m/s, assicurando quindi rapporti di massa più vantaggiosi;

3. O_2/H_2, la quale come noto assicura una velocità efficace d'uscita nel vuoto intorno ai 4500 m/s, con conseguenti rapporti di massa molto più favorevoli.

Le opzioni 2. e 3. richiedono evidentemente la disponibilità di idrogeno. Se questo fosse disponibile sulla superficie, o nel sottosuolo di Marte, l'idrogeno (ma evidentemente anche l'ossigeno) potrebbero facilmente essere ottenuti per elettrolisi. Tuttavia, nel caso non si trovasse acqua su Marte, si renderebbe necessario importare l'idrogeno dalla Terra; tale possibilità potrebbe ancora risultare conveniente in quanto in generale la massa di idrogeno necessaria è relativamente piccola rispetto alla massa totale di propellente prodotto. Si può definire a questo proposito un indice chiamato *mass leverage* (che potremmo tradurre come "moltiplicazione della massa") definito come rapporto tra la massa del propellente (combustibile ed ossidante) prodotto *in situ*, e la massa dell'idrogeno importato dalla Terra:

$$\textit{mass leverage} = \frac{m_{prop\,prodotto}}{m_{H_2\,importato}} \tag{5.40}$$

che ovviamente si desidera sia il più alto possibile. Vediamo adesso in maggiore dettaglio come può avvenire la produzione dei propellenti per le tre opzioni delineate sopra.

1. O_2/CO: come accennato sopra, la CO_2 dell'atmosfera marziana può essere scissa in CO ed ossigeno portandola ad alta temperatura, indicativamente circa 1300 K. Questo ovviamente implica che sia disponibile un'adeguata sorgente di energia;

3. O_2/H_2: analizziamo questo caso prima di considerare l'opzione ossigeno/metano. Se si trovasse acqua su Marte, si potrebbe come detto decomporla per elettrolisi, ammesso di avere a disposizione un'adeguata sorgente di energia. Nel caso in cui invece l'idrogeno dovesse essere importato dalla Terra, questo verrebbe fatto reagire con la CO_2 dell'atmosfera marziana secondo la cosidetta reazione *water shift* inversa[14]

[14]La reazione *water shift* $CO + H_2O \rightarrow CO_2 + H_2$ è quella che trasforma per l'appunto il monossido di carbonio (la cui formazione, nella combustione per esempio di un idrocarburo, è rapida) in anidride carbonica, attraverso un processo caratterizzato da tempi più lunghi.



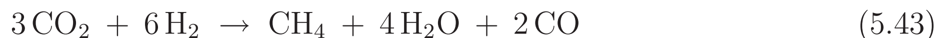
$$\mathrm{CO_2} \; + \; \mathrm{H_2} \;\rightarrow\; \mathrm{CO} \; + \; \mathrm{H_2O} \tag{5.41}$$

La H_2O prodotta in questa reazione potrebbe poi venir ulteriormente decomposta per elettrolisi in idrogeno ed ossigeno, ovverosia i due propellenti d'interesse. Il *mass leverage* risulta allora

$$\textit{mass leverage}_{\mathrm{O_2/H_2}} \;=\; \frac{m_{\mathrm{O_2}} \,+\, m_{\mathrm{H_2}}}{m_{\mathrm{H_2}}} \;=\; \frac{m_O \,+\, m_F}{m_F} \;=\; \frac{O}{F} + 1 \tag{5.42}$$

ed in particolare risulta uguale a 9 per combustione stechiometrica, ma è noto che rapporti O/F più bassi consentono velocità efficaci di uscita più alte (per la presenza di un eccesso di idrogeno nei prodotti di combustione, che ne abbassa quindi la massa molare). Si osservi in particolare che nel caso di missione di ritorno da Marte si potrebbero in particolare utilizzare rapporti O/F molto bassi, per avere c più alte, perché in questo caso l'accresciuta resistenza aerodinamica conseguente alle grandi masse di idrogeno (a bassa densità, quindi grande volume) gioca un ruolo molto minore che sulla Terra per effetto della molto minore densità atmosferica, anche se rimane il problema della massa dei voluminosi serbatoi dell'idrogeno liquido. Comunque, il vantaggio di una c più alta va pesato contro lo svantaggio di un *mass leverage* più basso al diminuire di O/F, per cui occorre identificare un valore ottimo di quest'ultimo rapporto.

2. O_2/CH_4: questa combinazione di propellenti può essere ottenuta attraverso il cosidetto processo Sabatier tra la CO_2 dell'atmosfera marziana e l'idrogeno importato:



$$3\,\mathrm{CO_2} \; + \; 6\,\mathrm{H_2} \;\rightarrow\; \mathrm{CH_4} \; + \; 4\,\mathrm{H_2O} \; + \; 2\,\mathrm{CO} \tag{5.43}$$

Le 4 molecole di H_2O prodotte vengono poi scisse per elettrolisi in 4 H_2 + 2 O_2, dando perciò la traformazione netta



$$3\,\mathrm{CO_2} \; + \; 2\,\mathrm{H_2} \;\rightarrow\; \mathrm{CH_4} \; + \; 2\,\mathrm{O_2} \; + \; 2\,\mathrm{CO} \tag{5.44}$$

per cui il *mass leverage* risulta

$$\textit{mass leverage}_{\mathrm{O_2/CH_4}} \;=\; \frac{m_{\mathrm{O_2}} \,+\, m_{\mathrm{CH_4}}}{m_{\mathrm{H_2}}} \;=\; \frac{2\,\mathcal{M}_{\mathrm{O_2}} \,+\, \mathcal{M}_{\mathrm{CH_4}}}{2\,\mathcal{M}_{\mathrm{H_2}}} \;=\; \frac{64 \,+\, 16}{4} \;=\; 20 \tag{5.45}$$

Si vede quindi che questa opzione consente un *mass leverage* molto più alto della precedente, pur a prezzo di una velocità efficace d'uscita significativamente ridotta. Si noti che i propellenti sono ricavati dal processo secondo la (5.44) in proporzioni stechiometriche.

Studi sull'applicazione di questi concetti di ISPP a missioni di andata e ritorno per Marte hanno permesso di identificarne il vantaggio in una riduzione tra il 20% ed il 45% della massa iniziale alla partenza dalla Terra. Occorre comunque considerare che essi richiedono impianti ove far avvenire le reazioni chimiche e di elettrolisi, ed una fonte di energia elettrica per l'alimentare quest'ultima. Nel caso di ipotetiche missioni con equipaggio umano, l'impianto per la produzione di propellenti *in situ* andrebbe lanciato con due anni di anticipo su tale missione, per avere il tempo di preparare i propellenti per il viaggio di ritorno. Un potenziale problema di questo concetto riguarda la difficoltà di conservare l'idrogeno importato, necessariamente stivato allo stato liquido come LH, per un lungo periodo (anni) a temperature criogeniche.

La ISPP fa parte di una categoria più vasta designata come *In Situ Resource Utilization* (ISRU) oppure *Extra Terrestrial Resource Utilization* (ETRU), che prevede l'utilizzazione delle risorse *in situ* per produrre per esempio acqua ed ossigeno per il sostentamento dell'equipaggio, etc.

5.2.4 *Targeting*

Nella valutazione del Δv richiesto per un'eventuale manovra di circolarizzazione, o comunque di inserimento in un'orbita attorno ad un pianeta, abbiamo enfatizzato l'importanza del valore del raggio al periabside $r_{p,P}$ della traiettoria di avvicinamento al pianeta, senza però entrare nel dettaglio dei fattori che lo determinano.

La fig. 5.13 mostra l'iperbole di avvicinamento al pianeta (in un riferimento centrato sul pianeta obiettivo) con i due asintoti di ingresso e di uscita, i quali formano un angolo β con l'asse dell'iperbole stessa. Si può inoltre identificare il raggio di periabside r_p, tra il vertice della traiettoria ed il centro del pianeta. Il semiasse maggiore a dell'iperbole coincide (a parte il segno, si ricordi che esso è negativo per un'iperbole) con la distanza tra il centro dell'iperbole ed il suo vertice, mentre il semiasse minore b coincide con la distanza, presa ortogonalmente all'asse, tra il vertice e l'asintoto dell'iperbole; per la distanza c tra il centro dell'iperbole ed il suo fuoco (cioè il centro del pianeta) vale la relazione, vedi ad esempio [25]

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.46}$$

Il raggio di periabside può pertanto essere espresso come differenza tra c ed il (modulo del) semiasse maggiore a

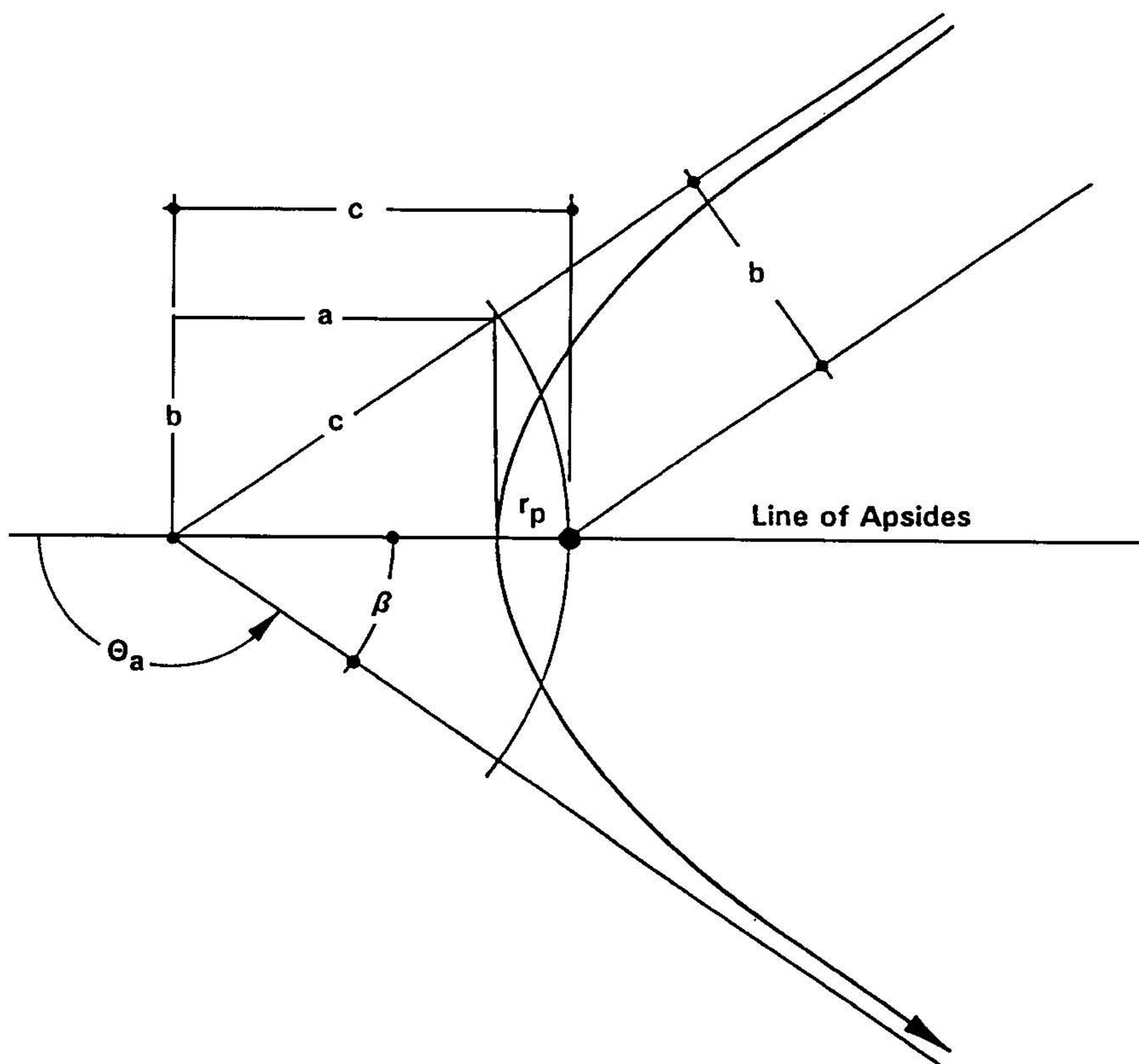


Figure 5.13: Traiettoria iperbolica di avvicinamento ad un pianeta, da [2].

$$r_p = c - \mid a \mid = c + a \tag{5.47}$$

il quale ultimo è legato all'energia meccanica totale (nel moto rispetto al pianeta P) dalla relazione

$$\mathcal{E}_P = -\frac{\mu_P}{2\,a} = \frac{v_{\infty,P}^2}{2} \tag{5.48}$$

dove nell'ultimo passaggio l'energia meccanica totale è stata espressa in funzione dei valori ad una distanza ipoteticamente infinita dal pianeta, per cui l'energia potenziale è nulla e la velocità è la velocità in eccesso. Il semiasse maggiore può dunque essere espresso come

$$a = -\frac{\mu_P}{v_{\infty,P}^2} \tag{5.49}$$

che risulta negativo, come deve essere per un'iperbole. La (5.47) si può pertanto riscrivere, tenendo conto anche della (5.46), come

$$r_p = \sqrt{\left(\frac{\mu_P}{v_{\infty,P}^2}\right)^2 + b^2} - \frac{\mu_P}{v_{\infty,P}^2} \tag{5.50}$$

Si vede quindi che, essendo $v_{\infty,P}$ definita dalle condizioni di iniezione in orbita di trasferimento, il raggio di periabside dipende solo dal valore del semiasse minore b. Dalla fig. 5.13 si può osservare che b può anche essere interpretato come la distanza tra una parallela all'asintoto tracciata per il centro del pianeta, e l'asintoto stesso, in quanto anch'essa esprimibile come $c \sin \beta$. Questa distanza prende il nome di *parametro d'impatto*, e può essere controllata mediante opportune correzioni di traiettoria durante la fase di avvicinamento al pianeta. Agendo su b si possono quindi determinare le condizioni di *targeting*, cioè in particolare imporre il valore del raggio di periabside (5.50).

La fig. 5.14, che mostra la posizione del veicolo in avvicinamento al pianeta su un piano normale alla traiettoria stessa e molto distante dal pianeta, in modo tale da poter assumere che il veicolo si stia ancora muovendo lungo l'asintoto, evidenzia che al disotto di un certo valore limite del parametro b il veicolo stesso impatterà sulla superficie del pianeta, mentre valori più grandi di questo limite portano a traiettoria con periabside a varie distanze dal pianeta.

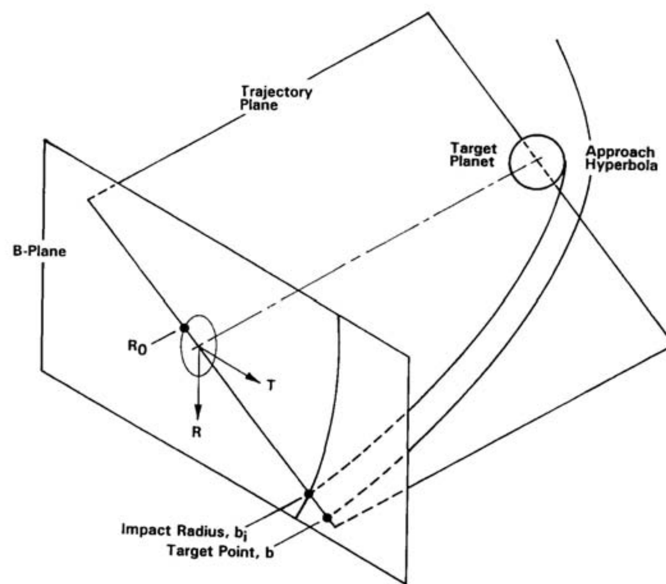


Figure 5.14: Condizioni di *targeting*, da [2].

5.2.5 Opportunità di lancio

In un trasferimento interplanetario verso un pianeta P (sempre sotto le ipotesi di orbite planetarie circolari e complanari), sia esso tramite ellissi tangenti o secanti, i raggi vettore Sole–Terra e Sole–pianeta obiettivo devono formare, al momento dell'iniezione nell'ellisse di trasferimento, un angolo

$$\psi = \Delta\nu - n_P T_{trasf} \tag{5.51}$$

dove $\Delta\nu$ è la differenza tra l'anomalia vera del veicolo sulla traiettoria di trasferimento al momento dell'arrivo ed al momento del lancio dalla Terra (quindi pari in particolare a 180° per trasferimenti alla Hohmann), e $n_P T_{trasf}$ è l'angolo descritto dal pianeta obiettivo durante il tempo di trasferimento; n_P è il suo moto medio

$$n_P = \frac{2\pi}{T_P} \tag{5.52}$$

essendo T_P il periodo di rivoluzione del pianeta obiettivo attorno al Sole. Analogamente, al momento dell'iniezione in una ipotetica ellisse di trasferimento verso la Terra, i raggi vettore Sole–pianeta

obiettivo e Sole–Terra devono formare un angolo

$$\psi \;=\; \Delta\nu \;-\; n_T\, T_{trasf} \qquad (5.53)$$

dove questa volta $\Delta\nu$ è la differenza tra l'anomalia vera del veicolo sulla traiettoria di trasferimento al momento dell'arrivo in prossimità della Terra ed al momento del lancio dal pianeta, e $n_T\, T_{trasf}$ è l'angolo descritto dalla Terra durante il tempo di trasferimento, essendo n_T il suo moto medio

$$n_T \;=\; \frac{2\,\pi}{T_T} \qquad (5.54)$$

Il lancio può quindi avvenire solo in istanti particolari, quando è soddisfatta la (5.51) al momento del lancio dalla Terra, o la (5.53) al momento dell'inizio del viaggio di ritorno. L'intervallo di tempo tra due opportunità di lancio successive si ha ogni *periodo sinodico*

$$S \;=\; \frac{2\,\pi}{n_T \;-\; n_P} \;=\; \frac{1}{1 \;-\; 1/T_P} \qquad (5.55)$$

che è l'intervallo di tempo in cui lo sfasamento tra i due pianeti $(n_T \,-\, n_P)\,\Delta t$ descrive un giro completo; nell'ultimo passaggio è stato fatto uso delle (5.52,5.54), ed il tempo di rivoluzione è stato espresso in anni (quindi pari ad uno per la Terra).

Un esempio limite è riportato in fig. 5.15, relativo ad un ipotetico pianeta obiettivo con periodo di rivoluzione intorno al Sole di due anni esatti. In questo caso, se un'opportunità di lancio per un trasferimento alla Hohmann si presenta all'inizio di un anno che chiamiamo anno 1, i pianeti si ripresenteranno in posizione favorevole per il lancio all'inizio dell'anno 3, cioè dopo due anni.

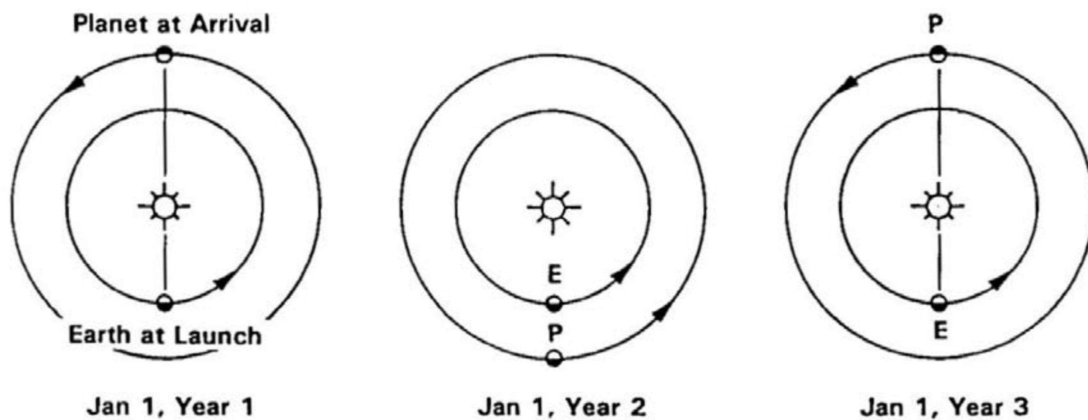


Figure 5.15: Posizioni relative della Terra e di un ipotetico pianeta con periodo di rivoluzione di due anni, da [2].

Pianeta	S (d)
Mercurio	116
Venere	584
Marte	780
Giove	399
Saturno	378
Urano	370
Nettuno	367
(Plutone)	367

Tab. 5.5. Periodo sinodico dei pianeti del sistema solare.

La tab. 5.5 riporta i periodi sinodici per i vari pianeti; si può osservare che esso tende ad un anno per i pianeti più esterni, perché il loro tempo di rivoluzione nella (5.55) è molto maggiore di un anno.

Nel caso in cui invece si consideri il fatto che le orbite dei pianeti non sono in realtà complanari, occorre inserire il veicolo in un'orbita di trasferimento, non complanare con quella terrestre, la quale porti ad intersecare il piano dell'orbita del pianeta obiettivo nel punto d'arrivo, come mostrato in fig. 5.16. È richiesta pertanto una correzione d'inclinazione, che conviene apportare all'inizio dell'orbita di trasferimento (cioè al lancio) per due motivi: a) per sfruttare il vantaggio di una manovra combinata in cui si fornisce sia il Δv per l'iniezione in orbita ellittica di trasferimento, sia il Δv per l'aggiustamento dell'inclinazione, vedi par. 3.2, b) per poter utilizzare il sistema propulsivo del lanciatore, che può fornire velocità efficaci di uscita più alte rispetto a quello di bordo di un veicolo interplanetario, il quale deve necessariamente utilizzare propellenti di tipo *storable*, che forniscono

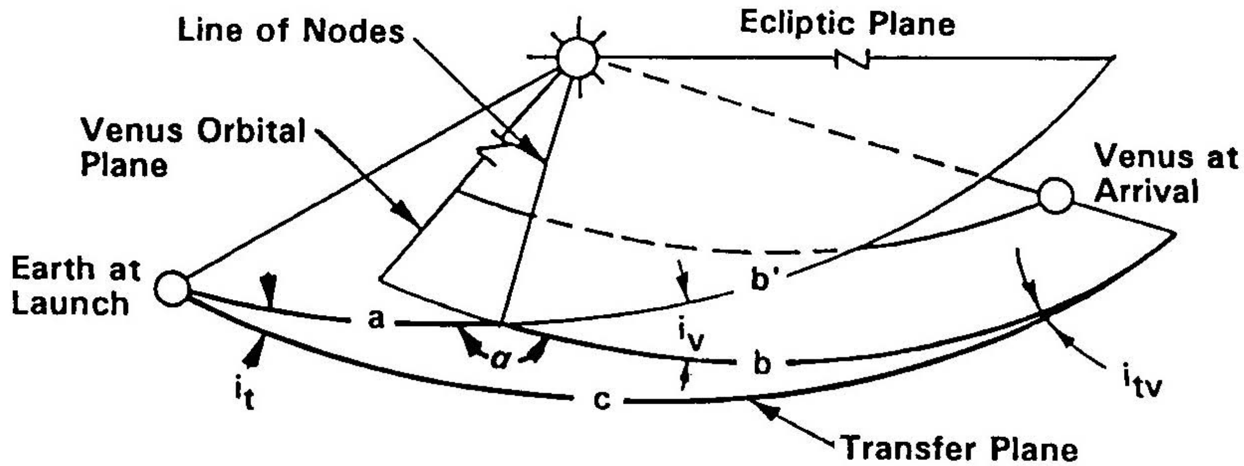


Figure 5.16: Piano dell'orbita di trasferimento interplanetario, da [2].

prestazioni inferiori a quelli criogenici, e sistemi di alimentazione a gas pressurizzato, penalizzanti sia in termini di massa inerte (per l'elevato peso dei serbatoi pressurizzati) che di prestazioni (per la limitata pressione in camera raggiungibile senza penalizzare troppo la massa dei serbatoi) rispetto a quelli a turbopompe, tipici dei lanciatori. Si noti che, per trasferimenti verso pianeti esterni, la correzione d'inclinazione viene apportata al perielio, in apparente contraddizione con quanto suggerito nel par. 3.2 (apportare la correzione ove la velocità è minima, quindi all'apoabside), appunto perché prevalgono le considerazioni a) e b) citate sopra.

Nel calcolo dettagliato di missioni interplanetarie va ovviamente anche tenuto conto del fatto che le orbite dei pianeti sono ellittiche, anziché circolari come finora ipotizzato per semplicità. Questo implica, per trasferimenti bitangenti, che in realtà la manovra mediante ellisse tangente può essere effettuata solo quando il pianeta di partenza ed obiettivo si trovino, uno all'istante del lancio, e l'altro nell'istante d'arrivo, o al perielio o all'afelio della loro orbita intorno al Sole (restringendo quindi notevolmente le opportunità di lancio, ed alterando la velocità di lancio rispetto al caso ideale di orbita circolare). Per trasferimenti mediante ellisse secante, l'ellitticità dell'orbita planetaria comporta il fatto che la lunghezza dell'arco dell'ellisse di trasferimento da percorrere (assegnata la velocità di lancio) varia nel tempo, e con essa varia quindi anche il tempo di trasferimento. In effetti, si possono scegliere arbitrariamente sia la data di partenza che quella d'arrivo della missione, in base alle quali si può determinare (tramite opportuni codici di calcolo che tengano conto dell'inclinazione e dell'eccentricità delle orbite planetarie) il Δv richiesto dalla missione, e l'associato tempo di trasferimento.

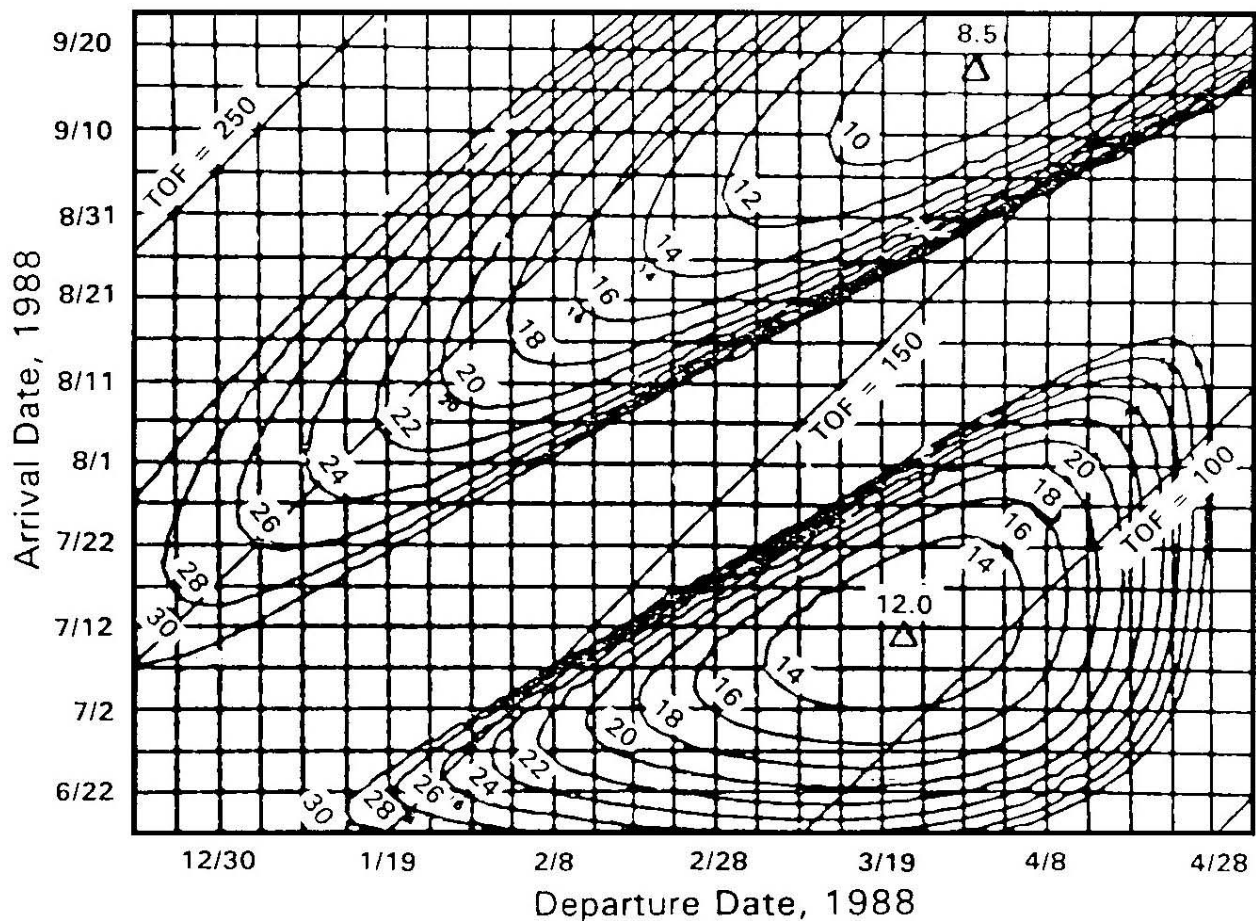


Figure 5.17: Curve di livello di $c_3 = v^2_{\infty,T}$ (in km^2/s^2) per missioni verso Venere nel 1988, da [2].

A titolo di esempio, la fig. 5.17 riporta la velocità in eccesso richiesta (espressa come c_3, che ne è il quadrato) per una missione verso Venere, nell'anno 1988. In ascissa è riportata la data di partenza (indicata, secondo l'uso anglosassone, preponendo il mese al giorno), in ordinata quella di arrivo; scegliendo arbitrariamente entrambe (purché, ovviamente, la seconda sia successiva alla prima...) si può leggere c_3 dalle curve di livello. L'ascissa x è quindi una data di inizio missione t_i a partire da una data iniziale t_{0i}, cioè un $t_i - t_{0i}$; analogamente, l'ordinata y è la data di fine missione misurata a partire da una data iniziale un t_{0f}, cioè un $t_f - t_{0f}$. Il tempo di trasferimento è pertanto esprimibile come

$$T_{trasf} = t_f - t_i = (y + t_{0f}) - (x + t_{0i}) \tag{5.56}$$

per cui

$$y = x + (t_{0i} - t_{0f} + T_{trasf}) \tag{5.57}$$

dalla quale si evince che, fissato il valore del tempo di trasferimento, la relazione tra ordinata ed ascissa è lineare con pendenza unitaria. Il tempo di trasferimento compare nel termine noto dell'equazione della retta (5.57), quindi ne modifica il valore dell'intercetta sull'asse x. Si può vedere che, fissato il tempo di trasferimento ritenuto accettabile per la missione, si possono identificare le date di lancio per le quali il c_3 richiesto dalla missione risulta minimo. Si può anche constatare che il c_3 necessario cresce al diminuire del tempo di trasferimento imposto.

5.3 Fionda gravitazionale (*swing–by*)

Nel trasferimento verso pianeti lontani, si può trarre vantaggio dell'effetto di fionda gravitazionale, o *swing–by*, che si ha nel passaggio in prossimità di un altro pianeta. In tale passaggio la traiettoria iperbolica del veicolo (rispetto al pianeta), che si avvicina secondo la direzione di un asintoto e successivamente si allontana secondo la direzione dell'altro asintoto, viene quindi deviata di un angolo, vedi fig. 5.18

$$\delta = \pi - 2\,\beta \tag{5.58}$$

essendo β l'angolo tra l'asse dell'iperbole e l'asintoto, già introdotto nel par. 5.2.4, per il quale vale la relazione, [25]

$$\beta = \cos^{-1} \frac{1}{1 - r_{p,P}/a} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} \tag{5.59}$$

Si ricordi che $a < 0$ per iperboli. L'angolo β risulta quindi dipendere dal parametro d'impatto b, il quale come detto può essere controllato mediante opportune correzioni della traiettoria in avvicinamento al pianeta. Incidentalmente, la massima deviazione della traiettoria si ha per $\beta = 0$, che dà $\delta = \pi$, ma questo richiede un raggio di periabside nullo, condizione evidentemente non realizzabile perché per b minore del raggio del pianeta si ha un'impatto sulla superficie. Ad ogni modo, tanto minore è il raggio di periabside, tanto maggiore la deviazione. La velocità relativa al pianeta non

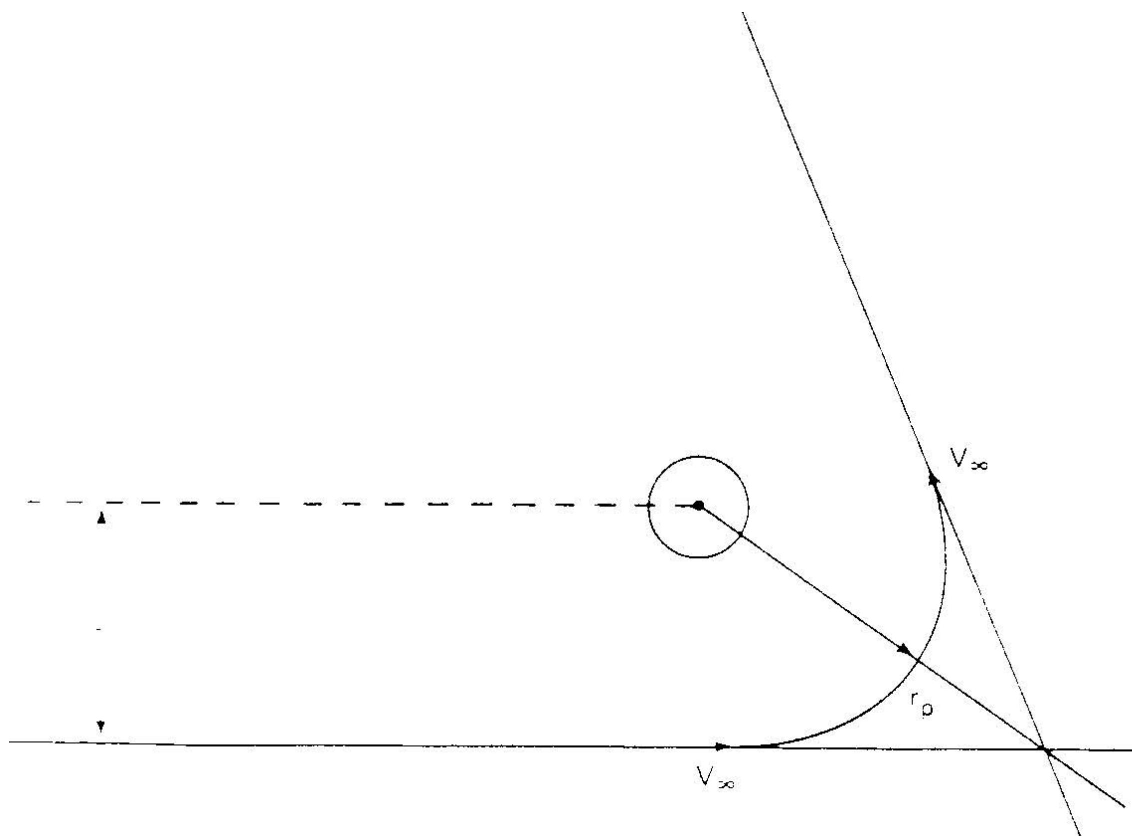


Figure 5.18: Asintoti di ingresso e uscita, da [26].

varia in modulo tra ingresso ed uscita nella sua sfera d'influenza, ma quella rispetto ad un sistema inerziale può aumentare o diminuire, a seconda delle condizioni di avvicinamento al pianeta.

La fig. 5.19 mostra come la velocità del veicolo al confine della sfera d'influenza prima della deviazione da parte del pianeta (designata con l'indice B, per *before*, prima) si compone con la velocità di rivoluzione del pianeta lungo la sua orbita per dare la velocità relativa al pianeta all'ingresso appunto nella sfera d'influenza. La velocità all'uscita della sfera d'influenza sarà come detto uguale in modulo ma deviata di un angolo δ, e componendo questa velocità con la velocità di rivoluzione del pianeta intorno al Sole si ottiene la velocità assoluta dopo l'incontro planetario (designata con l'indice A, per *after*, dopo). Si può osservare che quando la traiettoria di avvicinamento al pianeta è tale per cui il veicolo passa *dietro* al pianeta stesso, la velocità assoluta del veicolo aumenta, mentre se la traiettoria passa *davanti* al pianeta, la velocità assoluta del veicolo diminuisce.

Questo effetto di *swing–by* consente di ridurre il Δv che deve essere conferito al veicolo dal sistema propulsivo, e quindi in particolare di ridurre i tempi di trasferimento verso pianeti lontani, vedi fig.

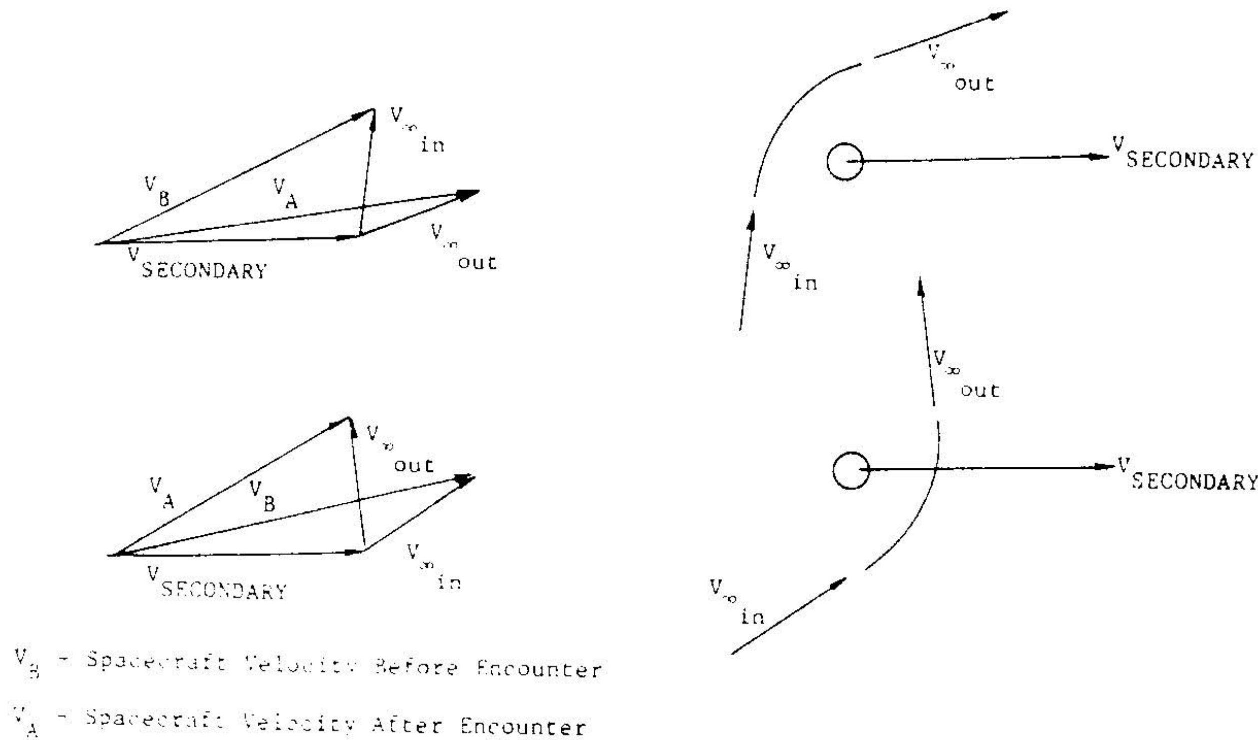


Figure 5.19: Composizione delle velocità relativa al pianeta e della velocità di trascinamento (dovuta al moto di rivoluzione), per passaggio dietro al pianeta (alto), o davanti (basso), da [22].

5.20. Queste operazioni comportano comunque un'accurata definizione delle finestre di lancio, oltre che un accurato controllo della traiettoria di avvicinamento al pianeta. Si noti che l'energia cinetica conferita (o sottratta) al veicolo è ottenuta a prezzo dell'energia cinetica del moto di rivoluzione del pianeta intorno al Sole, la quale subisce una corrispondente diminuzione (o aumento), che dà comunque effetti impercettibili sul moto del pianeta a causa della sua massa enormemente più grande di quella del veicolo.

Le manovre di *swing–by* possono anche essere utilizzate per realizzare missioni al di fuori del piano dell'eclittica, le quali richiederebbero un Δv estremamente elevato per la correzione d'inclinazione rispetto al piano dell'orbita terrestre, cioè l'eclittica. La fig. 5.21 mostra la traiettoria seguita dalla missione Ulysses per l'osservazione del polo sud del Sole, conseguita grazie all'aiuto di uno *swing–by* planetario che ha consentito di deviare la traiettoria del veicolo, portandola al difuori del piano dell'eclittica. Manovre di *swing–by* sono state effettuate anche per l'esplorazione ravvicinata dei vari satelliti di Giove (in questo caso avvalendosi del campo gravitazionale dei satelliti stessi).

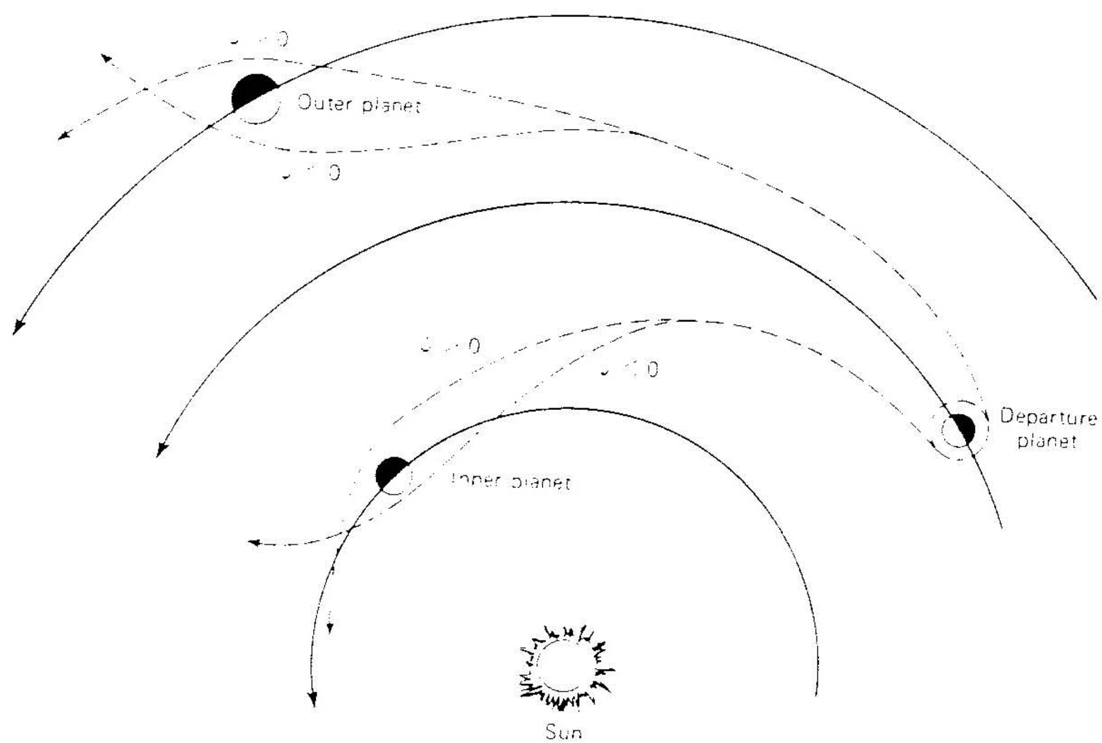


Figure 5.20: Effetto dello *swing–by* sulle traiettorie di trasferimento interplanetarie, da [26].

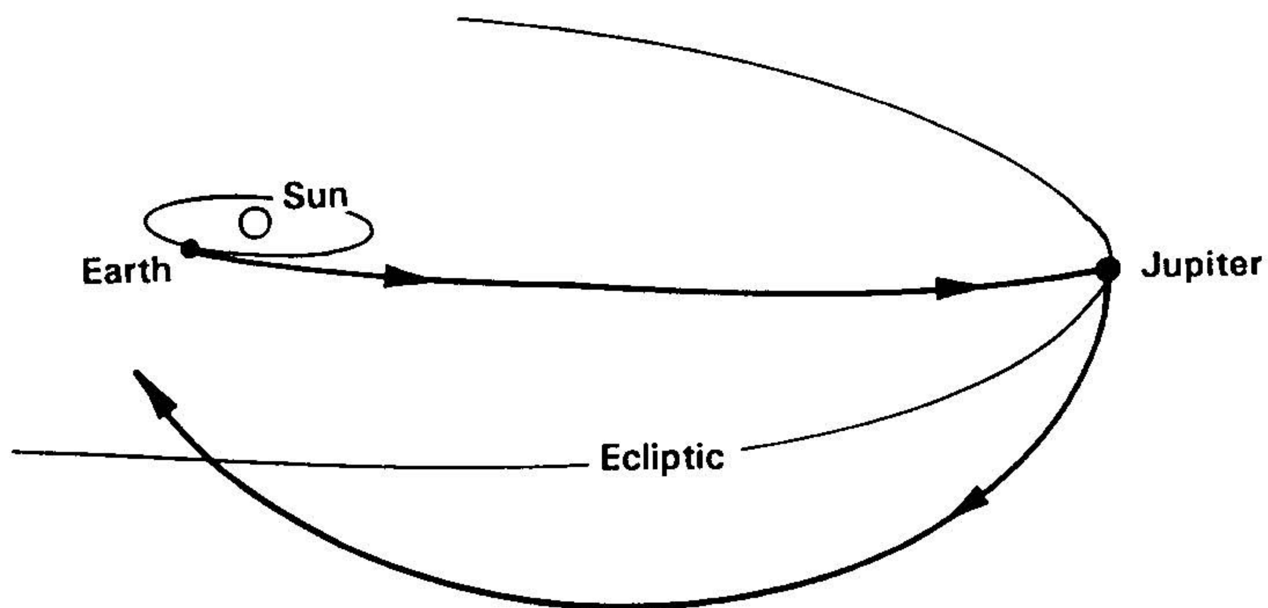


Figure 5.21: Missione di osservazione del polo sud del Sole (Ulysses).

Capitolo 6
Rientro atmosferico

In questo capitolo intendiamo individuare i problemi che si incontrano nel rientro nell'atmosfera di un veicolo proveniente da un'orbita attorno ad un pianeta, o da una traiettoria di ritorno dalla Luna, dai pianeti, od eventualmente altri corpi del sistema solare. Il caso ovviamente più comune è quello di rientro nell'atmosfera terrestre, ma per maggior generalità parleremo di rientro nell'atmosfera di un generico pianeta o corpo celeste.

A causa delle elevatissime velocità che competono ad orbite planetarie, ed ancor più a traiettorie di ritorno da missioni verso satelliti o pianeti, e della elevata energia potenziale che il veicolo possiede per effetto della sua altezza sopra la superficie del pianeta (la quale si trasforma a sua volta in energia cinetica nel corso del rientro), il veicolo durante la fase di rientro deve smaltire la relativa energia cinetica in calore per poter arrivare all'impatto al suolo con velocità sostanzialmente nulla. Quindi il rientro comporta forti carichi termici per effetto del calore che si sviluppa, forti carichi dinamici per effetto della resistenza aerodinamica e delle onde d'urto che si formano (cioè un'elevata pressione dinamica), e forti decelerazioni del veicolo.

Una quantificazione accurata di questi fenomeni richiede un'integrazione dettagliata delle equazioni del moto. In questo contesto tuttavia perseguiremo un'integrazione analitica delle equazioni del moto ricavate sotto alcune ipotesi semplificative, la quale permette di avere indicazioni di carattere generale su quanto avviene al rientro (anziché una soluzione caso per caso, come risulta da un'integrazione numerica), e di individuare le tecniche di rientro più opportune.

6.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto sono facilmente derivabili dalle (2.15) ponendo pari a zero la spinta F; conviene però adattare queste equazioni al caso in questione. Per questo, la portanza e la resistenza aerodinamiche sono ora espresse come forza aerodinamica normale L' e parallela D' alla direzione

del moto (anziché all'asse del razzo). Introduciamo poi un'approssimazione, confondendo velocità assolute e relative; quest'approssimazione è lecita quando queste velocità sono grandi rispetto alla velocità di trascinamento dovuta al moto di rotazione del pianeta, quindi durante la maggior parte della fase di rientro, mentre risulta criticabile quando la velocità è bassa, cioè verso la fine della fase di rientro. Quest'ultima fase tuttavia pone limitati problemi, in quanto evidentemente i problemi più importanti si verificano nella fase di volo ad alta velocità. L'approssimazione risulta pertanto giustificata in questo contesto al fine di trovare una successiva soluzione analitica (mentre certo non lo sarebbe nello studio della fase di salita, nella quale si hanno perdite per disallineamento particolarmente elevate proprio nella fase iniziale del volo, vedi par. 2.1.3). Sotto queste ipotesi le equazioni del moto si possono pertanto scrivere come

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m\,\dot{v} & = & -\,D' \,-\, m\,g\,\sin\gamma \\ m\,v\,\dot{\gamma} & = & L' \,-\, m\,g\,\cos\gamma \,+\, m\,\dfrac{v^2}{r}\cos\gamma \end{array} \right. \tag{6.1}$$

A queste equazioni dobbiamo aggiungere un'equazione che dia la variazione della quota (o del raggio dal centro del pianeta) nel tempo, al fine di poter quantificare la densità dell'atmosfera ed individuare l'istante di impatto sulla superficie, ed eventualmente un'ulteriore equazione che dia la spazio percorso dalla traccia del veicolo sulla superfice planetaria al variare nel tempo, che serve ad individuare il punto d'impatto sulla superficie del pianeta, insieme al dato sull'inclinazione dell'orbita rispetto all'equatore di quest'ultimo. Tali equazioni si ricavano dalle (2.7), l'una direttamente dalla prima di queste, l'altra dalla seconda, osservando che ad un arco infinitesimo descritto su una traiettoria di raggio r corrisponde sulla superficie del pianeta una traccia che è R/r volte tale arco, avendo indicato con R il raggio del pianeta. Il sistema completo delle equazioni del moto, seppur semplificate, è dunque

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{v} & = & -\,\dfrac{D'}{m} \,-\, g\,\sin\gamma \\ v\,\dot{\gamma} & = & \dfrac{L'}{m} - \left(g \,-\, \dfrac{v^2}{r} \right) \cos\gamma \\ \dot{r} & = & v\,\sin\gamma \\ \dot{s} & = & \dfrac{R}{r}\,v\,\cos\gamma \end{array} \right. \tag{6.2}$$

dove le espressioni di portanza e resistenza sono (si noti che è stata omessa la distinzione tra velocità assoluta e relativa, e che i coefficienti aerodinamici sono stati indicati con l'apice per sottolineare che essi sono relativi agli assi, normale e tangenziale alla direzione del moto, sopra indicati)

$$L' = c'_L \frac{\rho v^2}{2} S \qquad (6.3)$$

$$D' = c'_D \frac{\rho v^2}{2} S \qquad (6.4)$$

essendo S la sezione frontale del veicolo. L'accelerazione di gravità varia come l'inverso del quadrato della distanza dal centro del pianeta, per cui può essere legata a quella al livello del suolo (*sea level*), g_{sl}, dalla relazione

$$g = g_{sl} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \qquad (6.5)$$

Nelle espressioni (6.3,6.4) occorre specificare come la densità varia con il raggio r, od equivalentemente con la quota $h = r - R$. A tal fine, ricorriamo all'equazione termica di stato

$$p = \rho \mathsf{R} T \qquad (6.6)$$

dove con R è stata indicata la costante del gas (uguale alla costante universale dei gas diviso la massa molare del gas atmosferico), e ne consideriamo la derivata logaritmica (cioè la derivata del logaritmo di ambo i membri)

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \qquad (6.7)$$

In questa espressione la variazione di pressione è quella dovuta alla pressione idrostatica di una colonna di altezza dr infinitesima di atmosfera

$$dp = -\rho\, g\, dr \tag{6.8}$$

dove il segno meno indica che la pressione decresce con il raggio. Sostituendo nella (6.7) risulta

$$-\frac{\rho\, g\, dr}{\rho\, \mathsf{R}\, T} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \tag{6.9}$$

dalla quale si può esplicitare la variazione di densità come

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{\mathsf{R}\, T}\, dr - \frac{dT}{T} = -\left(\frac{g}{\mathsf{R}} + \frac{dT}{dr}\right) \frac{dr}{T} \tag{6.10}$$

Fin qui non sono state introdotte approssimazioni. Per ottenere una soluzione analitica, è necessario tuttavia a questo punto introdurre due approssimazioni: a) la temperatura non varia con la quota per cui $dT/dr = 0$ (atmosfera isoterma); b) l'accelerazione di gravità g può essere assunta costante durante la fase di rientro, $g =$ cost. Chiaramente entrambe le ipotesi sono criticabili (in particolare la prima, in quanto è noto che, almeno per la Terra, la temperatura varia sensibilmente con la quota, mentre la seconda è in qualche misura giustificata dal fatto che lo spessore dell'atmosfera è piccolo rispetto al raggio del pianeta), ma sono tuttavia accettabili al fine di pervenire ad una soluzione analitica (in quanto la variazione di temperatura con la quota è contenuta in qualche decina di punti percentuale, mentre la densità varia di numerosi ordini di grandezza entro lo spessore dell'atmosfera). Dalla (6.10) si ricava allora

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{\mathsf{R}\, T}\, dr = -\beta\, dh \tag{6.11}$$

dove β in base alle approssimazioni introdotte è una costante, con le dimensioni dell'inverso di una lunghezza (per cui $1/\beta$ ha le dimensioni di una lunghezza), il cui valore, per l'atmosfera terrestre, può essere stimato ricordando che $\mathsf{R} = R^0/\mathcal{M} \simeq 287$ J/(kg K), essendo R^0 la costante universale dei gas, pari a 8314 J/(kmol K), e $\mathcal{M}$ la massa molare dell'aria, circa 28,9645 kg/kmol, mentre per la temperatura si può prendere un valore indicativamente compreso tra i 288,15 K (= 15 C)

dell'atmosfera standard al livello del suolo, ed il valore nella tropopausa, circa 216,65 K (= − 56,5 C). Tenuto conto di tutte le approssimazioni introdotte, si può assumere per l'atmosfera terrestre

$$\frac{1}{\beta} \simeq 7000 \;\; \text{m} \tag{6.12}$$

Integrando la (6.11) tra il livello del suolo e la quota generica h si ha infine l'espressione (necessariamente approssimativa) della variazione della densità con la quota:

$$\rho(h) \; = \; \rho_{sl} \; \exp(-\beta\, h) \tag{6.13}$$

Nelle eq. (6.2) è poi lecito assumere, alla luce delle varie approssimazioni sin qui introdotte, che nel termine centrifugo v^2/r il raggio possa essere tenuto costante pari al raggio del pianeta R, essendo come detto lo spessore dell'atmosfera piccolo rispetto a tale raggio. Ad esempio, per la Terra per convenzione si assume che l'ingresso nell'atmosfera avvenga alla quota di 122 km (400 000 piedi) per cui, essendo il raggio equatoriale della Terra pari a 6378 km, l'approssimazione introdotta comporta un errore inferiore al 2%.

Le prime due equazioni delle (6.2) (le rimanenti due non necessitano di ulteriori manipolazoni) possono pertanto essere riscritte come

$$\begin{cases} \dot{v} & = \; -\dfrac{c'_D\, S}{m}\dfrac{\rho\, v^2}{2} \; - \; g\, \sin\gamma \\ v\,\dot{\gamma} & = \; \dfrac{c'_L\, S}{m}\dfrac{\rho\, v^2}{2} \; - \; \left(g \; - \; \dfrac{v^2}{R}\right)\,\cos\gamma \end{cases} \tag{6.14}$$

Introducendo il *coefficiente balistico*, che è una caratteristica del particolare corpo di rientro sotto esame

$$C_B \; = \frac{m}{c'_D\, S} \tag{6.15}$$

dove m è la massa del corpo, per cui C_B ha dimensioni kg/m^2 (anche se a volte ne viene data una

definizione alternativa, $m\,g_{sl}/(c_D'\,S)$, con le dimensioni quindi di una pressione), si arriva alla forma

$$\begin{cases} \dot{v} \;=\; -\,\dfrac{1}{C_B}\,\dfrac{\rho\,v^2}{2} - g\,\sin\gamma \\ v\,\dot{\gamma} \;=\; \dfrac{L}{D}\,\dfrac{1}{C_B}\,\dfrac{\rho\,v^2}{2} - \left(g - \dfrac{v^2}{R}\right)\cos\gamma \end{cases} \tag{6.16}$$

Queste equazioni andrebbero integrate insieme alla terza delle (6.2), la quale ultima necessaria per determinare la densità, funzione dell'altezza (o equivalentemente del raggio). Per evitare di dover considerare quest'ulteriore equazione, risulta conveniente dal punto di vista analitico sostituire la variabile indipendente tempo t con la variabile indipendente ρ. Si ricordi che la densità per la (6.13) è una funzione della sola quota h, per cui conoscere la soluzione delle (6.16) in funzione di ρ equivale a conoscerla in funzione della quota. Per operare la trasformazione di variabili, osserviamo che le derivate rispetto al tempo possono essere scritte nella forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\frac{d}{dr} = v\,\sin\gamma\,\frac{d}{dr} \tag{6.17}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la terza delle (6.2). Derivando la (6.13) rispetto al raggio $r = h + R$ si ha

$$\frac{d\rho}{dr} = -\,\rho_{sl}\,\beta\,\exp(-\,\beta\,h) = -\,\beta\,\rho \tag{6.18}$$

la quale consente di esprimere le derivate rispetto al raggio come derivate rispetto alla densità

$$\frac{d}{dr} = \frac{d\rho}{dr}\,\frac{d}{d\rho} = -\,\beta\,\rho\,\frac{d}{d\rho} \tag{6.19}$$

Sostituendo questa espressione nella (6.17) si esprime infine anche la derivata rispetto al tempo come una derivata rispetto alla densità:

$$\frac{d}{dt} = -\beta\,\rho\,v\,\sin\gamma\,\frac{d}{d\rho} \tag{6.20}$$

Le (6.20,6.19) possono dunque essere sostituite nelle (6.16), dando quindi le equazioni del moto con la densità (ossia, come detto, la quota) come variabile indipendente

$$\left\{ \begin{aligned} -\beta\,\rho\,v\,\sin\gamma\,\frac{dv}{d\rho} &= -\frac{1}{C_B}\,\frac{\rho\,v^2}{2} - g\,\sin\gamma \\ -\beta\,\rho\,v^2\,\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{d\rho} &= \frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{\rho\,v^2}{2} - \left(g - \frac{v^2}{R}\right)\cos\gamma \end{aligned} \right. \tag{6.21}$$

Dividendo la prima per $-\beta\,\rho\,g\,R\sin\gamma/2$, la seconda per $\beta\,\rho\,v^2 = \beta\,\rho\,R\,v^2/R$ si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2\,v\,\dfrac{dv}{d\rho}}{g\,R} &= \frac{1}{C_B}\,\frac{1}{\beta\,\sin\gamma}\,\frac{v^2}{g\,R} + \frac{2}{\rho\,\beta\,R} \\ -\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{d\rho} &= \frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta} - \frac{1}{\rho\,\beta\,R}\left(\frac{g\,R}{v^2} - 1\right)\cos\gamma \end{aligned} \right. \tag{6.22}$$

Poiché $2\,v\,dv = dv^2$ e $-\sin\gamma\,d\gamma = d\cos\gamma$, si arriva alla forma

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right)}{d\rho} &= \frac{1}{C_B}\,\frac{1}{\beta\,\sin\gamma}\left(\frac{v^2}{g\,R}\right) + \frac{2}{\rho\,\beta\,R} \\ \frac{d\cos\gamma}{d\rho} &= \frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta} - \left[\left(\frac{g\,R}{v^2}\right) - 1\right]\frac{\cos\gamma}{\rho\,\beta\,R} \end{aligned} \right. \tag{6.23}$$

dove le incognite sono $v^2/(g\,R)$ (con il significato di un'energia adimensionale) e $\cos\gamma$, cioè il coseno dell'angolo di volo. In particolare, il quadrato della velocità di orbitazione circolare per un'ipotetica

orbita di altezza nulla è esprimibile come $v_c^2 = \mu/R = g\,R$, per cui l'incognita $v^2/(g\,R)$ può essere vista come un'energia cinetica normalizzata rispetto al valore che compete a tale ipotetica orbita.

Le (6.23) sono le cosidette equazioni del moto 'ridotte'. Le condizioni iniziali di tali equazioni sono quelle relative all'ingresso nell'atmosfera, che come detto può per convenzione essere identificato per la Terra con la quota di 122 km; tali condizioni sono designate con l'indice e, che qui sta per *entry*, ingresso. Si avrà quindi una velocità di ingresso v_e, un angolo di volo all'ingresso γ_e, in corrispondenza alla densità ρ_e che si ha alla quota di ingresso h_e, cioè 122 km (per la Terra). La soluzione del sistema (6.23) porta a determinare la velocità e l'angolo di volo come funzioni della densità, ossia della quota per la (6.13). I parametri che compaiono nel sistema (6.23) possono essere distinti in quelli relativi al veicolo, che sono il coefficiente balistico C_B e la sua efficienza aerodinamica (rapporto portanza/resistenza) L/D, e quelli relativi al pianeta sul quale avviene il rientro (la Terra od un altro corpo celeste dotato di atmosfera) che sono il suo raggio R, ed il valore della costante β che compare nella (6.13). Analizziamo i diversi termini che appaiono a secondo membro delle (6.23): il termine

$$\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{\beta\,\sin\gamma}\left(\frac{v^2}{g\,R}\right) \tag{6.24}$$

ha il significato di una resistenza aerodinamica 'ridotta', il termine

$$\frac{2}{\rho\,\beta\,R} \tag{6.25}$$

quello di una componente della forza peso nella direzione ('tangenziale') della traiettoria, 'ridotta', mentre

$$\frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta} \tag{6.26}$$

assume il significato di una portanza 'ridotta'; infine

$$\left[\left(\frac{g\,R}{v^2} \right) - 1 \right] \frac{\cos \gamma}{\rho\,\beta\,R} \tag{6.27}$$

è una differenza tra le componenti delle forze peso e centrifuga, anch'essa 'ridotta'.

Delle eq. (6.23) si può con relativa facilità ottenere una soluzione numerica, integrando le equazioni differenziali con una tecnica di quadratura quale quelle di Runge–Kutta; questa soluzione è accurata (nei limiti delle approssimazioni introdotte), ma come tutte le soluzioni numeriche si attaglia solo al particolare caso studiato e non permette quindi di trarre conclusioni generali. Può allora essere più interessante ricercare soluzioni analitiche per alcune tecniche particolari di rientro, le quali, sebbene basate su ipotesi in una certa misura approssimative, consentono di evidenziare l'effetto dei vari parametri in gioco. Le tecniche di rientro che consideriamo sono il rientro balistico, il rientro planato in quasi–equilibrio, ed il rientro cosidetto *skip*, che potremmo tradurre come 'a balzelli'. Per questi tre casi cercheremo dunque soluzioni analitiche approssimate, cosidette "al prim'ordine".

6.2 Rientro balistico

Nel rientro balistico la portanza L del corpo di rientro è assunta nulla; questa situazione è ben verificata quando il corpo di rientro ha una geometria assialsimmetrica, ed il rientro avviene ad incidenza aerodinamica α (angolo tra l'asse del corpo e la direzione della velocità) nulla. Anche qualora si verifichino limitati scostamenti dalla condizione $L = 0$, l'effetto della portanza può essere sostanzialmente cancellato imponendo una rotazione intorno all'asse (per esempio le capsule Mercury dei primi voli statunitensi con equipaggio umano rientravano con una velocità di rollio di 15°/s). Per rendere lo studio del rientro balistico trattabile analiticamente, introduciamo l'approssimazione

$$\frac{1}{\beta\,R} \simeq 0 \tag{6.28}$$

In base alla (6.12), si evince che il termine a primo membro vale circa 1/900 per la Terra, per cui il secondo termine a secondo membro della prima delle (6.23) risulta in genere trascurabile rispetto al primo; tale approssimazione risulta tuttavia meno lecita tanto verso l'inizio che verso la fine della traiettoria di rientro. Nel primo caso infatti anche il termine di resistenza aerodinamica ridotta è

trascurabile, mentre nel secondo la velocità risulta bassa per cui il termine appena citato è ancora piccolo. Per quanto riguarda la seconda delle (6.23), entrambi i termini a secondo membro possono essere trascurati, il primo avendo assunto $L = 0$, il secondo per la (6.28). Occorre tuttavia precisare che verso la fine del rientro, quando v è bassa, quest'ultimo termine avvicina la forma indeterminata $\infty \cdot 0$, per cui non è più lecito trascurarlo. Sono stati quindi trascurati i termini della (6.23) che abbiamo chiamato, vedi (6.24–6.27), di forza peso, e differenza tra forza peso e centrifuga (oltre che ovviamente quello di portanza). Le ipotesi avanzate in questo paragrafo equivalgono quindi ad aver assunto forza peso nulla, e pianeta piatto (in quanto è nulla la forza centrifuga). Le equazioni del moto si riscrivono quindi in questo caso come

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right)}{d\rho} = \dfrac{1}{C_B}\dfrac{1}{\beta\,\sin\gamma}\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right) \\ \dfrac{d\cos\gamma}{d\rho} = 0 \end{cases} \tag{6.29}$$

dove la seconda indica immediatamente che l'angolo di volo è necessariamente costante, quindi uguale al valore all'ingresso nell'atmosfera

$$\gamma = \gamma_e \tag{6.30}$$

Questa condizione risulta ben verificata per angoli di ingresso relativamente 'ripidi', del tipo

$$\gamma_e < -5^{\mathrm{o}} \tag{6.31}$$

mentre risulta meno valida per valori di γ_e più piccoli (in modulo). Rimane quindi da risolvere la prima delle (6.29), che essendo del tipo $dz/d\rho = \alpha\, z$ con α costante, ha soluzione del tipo $\log z/z_e = \alpha\,(\rho - \rho_e) \simeq \alpha\,\rho$ dove l'ultimo passaggio deriva dal fatto che la densità all'ingresso nell'atmosfera è bassissima, e quindi $z = z_e\,\exp(\alpha\rho)$. Ritornando al caso specifico, la soluzione è perciò

$$\frac{v^2}{g\,R} = \frac{v_e^2}{g\,R}\exp\left(\frac{1}{\beta\,\sin\gamma_e}\frac{1}{C_B}\rho\right) \tag{6.32}$$

dalla quale si ottiene la velocità in funzione della densità, ossia della quota per la (6.13)

$$v = v_e \exp\left(\frac{1}{2\,\beta\,\sin\gamma_e}\,\frac{1}{C_B}\,\rho\right) = v_e\,\exp(C\,\rho) \tag{6.33}$$

dove con C è stato sinteticamente indicato un termine costante (negativo, perché tale è γ_e). Derivando la velocità rispetto al tempo tramite la (6.20) si ottiene l'accelerazione[15] (o meglio la decelerazione, negativa)

$$a = \frac{dv}{dt} = -\,\beta\,\rho\,v\,\sin\gamma\,\frac{dv}{d\rho} = -\,\beta\,\rho\,v_e^2\,\sin\gamma\,C\,\exp(2\,C\,\rho) \tag{6.34}$$

ossia

$$a = -\,\frac{\rho\,v_e^2}{2\,C_B}\,\exp\left(\frac{\rho}{\beta\,C_B\,\sin\gamma_e}\right) \tag{6.35}$$

Calcolando la derivata dell'accelerazione rispetto alla densità ed eguagliandola a zero, si ottiene il valore estremante di $\rho = -\,2\,C_B\,\sin\gamma_e$, e si può in particolare calcolare il modulo della decelerazione massima che il corpo di rientro subisce

$$a_{max} = \frac{\beta\,v_e^2\,\sin\gamma_e}{2\,e} \tag{6.36}$$

(essendo e il numero di Nepero), ovviamente importante per quantificare le sollecitazioni alle quali il carico utile è sottoposto. È poi naturalmente il caso di accertare che la decelerazione massima si abbia per $\rho < \rho_{sl}$, ovvero prima che il corpo impatti sul suolo; si può dimostrare che questa condizione è verificata se l'angolo di volo spazia nel campo definito dalla relazione

[15] Si ricordi che in questo caso la traiettoria è rettilinea, per cui non si ha variazione della direzione della velocità; confrontare con il successivo caso di rientro *skip*.

$$0 \; < \; - \sin \gamma_e \; < \; \frac{\rho_{sl}}{\beta \, C_B} \tag{6.37}$$

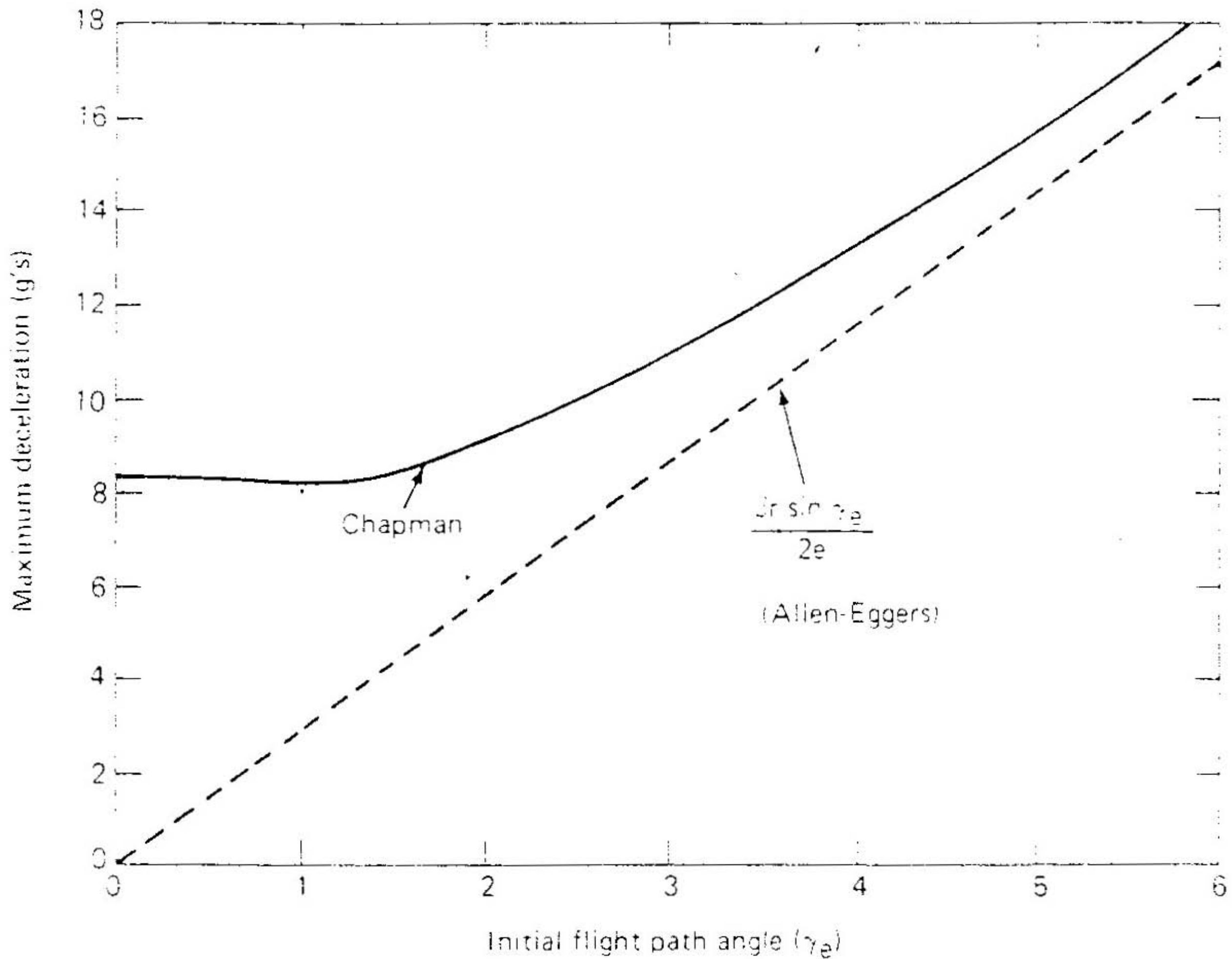


Figure 6.1: Decelerazione massima (in g) per rientro balistico da un'orbita terrestre bassa. Linea tratteggiata, teoria semplificata; linea a tratto continuo, teoria dettagliata, da [26].

La fig. 6.1 mostra dunque la decelerazione massima per rientro balistico sulla Terra; il risultato ricavabile attraverso la teoria semplificata qui esposta indica una relazione lineare tra decelerazione massima e modulo dell'angolo di volo d'ingresso, ma sappiamo che tale teoria è applicabile solo per valori di γ_e (in modulo) superiori a circa 5°, vedi (6.31). Un'integrazione dettagliata delle equazioni

del moto, senza le ipotesi semplificative qui introdotte, porta invece al risultato indicato a linea continua in figura; si può vedere che in realtà la relazione lineare sopra citata vale solo per $|\gamma_e| > 5^o$, mentre per valori inferiori la curva tende ad un asintoto, e la decelerazione massima raggiunge un valore di poco superiore agli 8 g per $|\gamma_e| < 1,5^o$, non ulteriormente riducibile. Se poi si considera il rientro sulla Terra da una traiettoria lunare od interplanetaria, si potrebbe constatare che la decelerazione massima raggiunge valori non inferiori ai 12 g.

Il rientro balistico comporta quindi forti decelerazioni, con conseguenti forti sollecitazioni sulle strutture e su un eventuale equipaggio umano; per contro, offre la possibilità di una notevole precisione nella determinazione del punto d'impatto sulla superficie del pianeta (per cui viene utilizzato, per esempio, dai missili balistici, per poter colpire con precisione l'obiettivo).

La fig. 6.2 riporta i valori tipici del coefficiente balistico (in ascissa) e del rapporto portanza/resistenza (in ordinata) per varie forme del corpo di rientro, in regime ipersonico. Si osservi comunque che il coefficiente balistico, in cui compare il rapporto tra una massa (proporzionale al volume, cioè ad una lunghezza caratteristica del corpo al cubo) ed una superficie (proporzionale ad una lunghezza caratteristica al quadrato), risulta proporzionale ad una lunghezza caratteristica del corpo, quindi è comunque più elevato per corpi di rientro di notevoli dimensioni, a prescindere dall'effetto della forma.

6.3 Rientro planato in quasi–equilibrio

Nel cosidetto rientro planato in quasi–equilibrio si adotta invece una portanza $L > 0$, ed angolo di volo di ingresso (in modulo) piccolo. Quest'ultima circostanza consente di introdurre le approssimazioni semplificative

$$\sin\gamma \simeq \gamma \tag{6.38}$$

$$\cos\gamma \simeq 1 \tag{6.39}$$

Si osservi che la (6.39), pur indicando che il coseno di γ può essere preso costante, *non* implica tuttavia che γ stesso sia assunto costante, vedi successiva (6.45). In base a tali approssimazioni semplificative, la seconda delle (6.23) si riduce alla forma algebrica

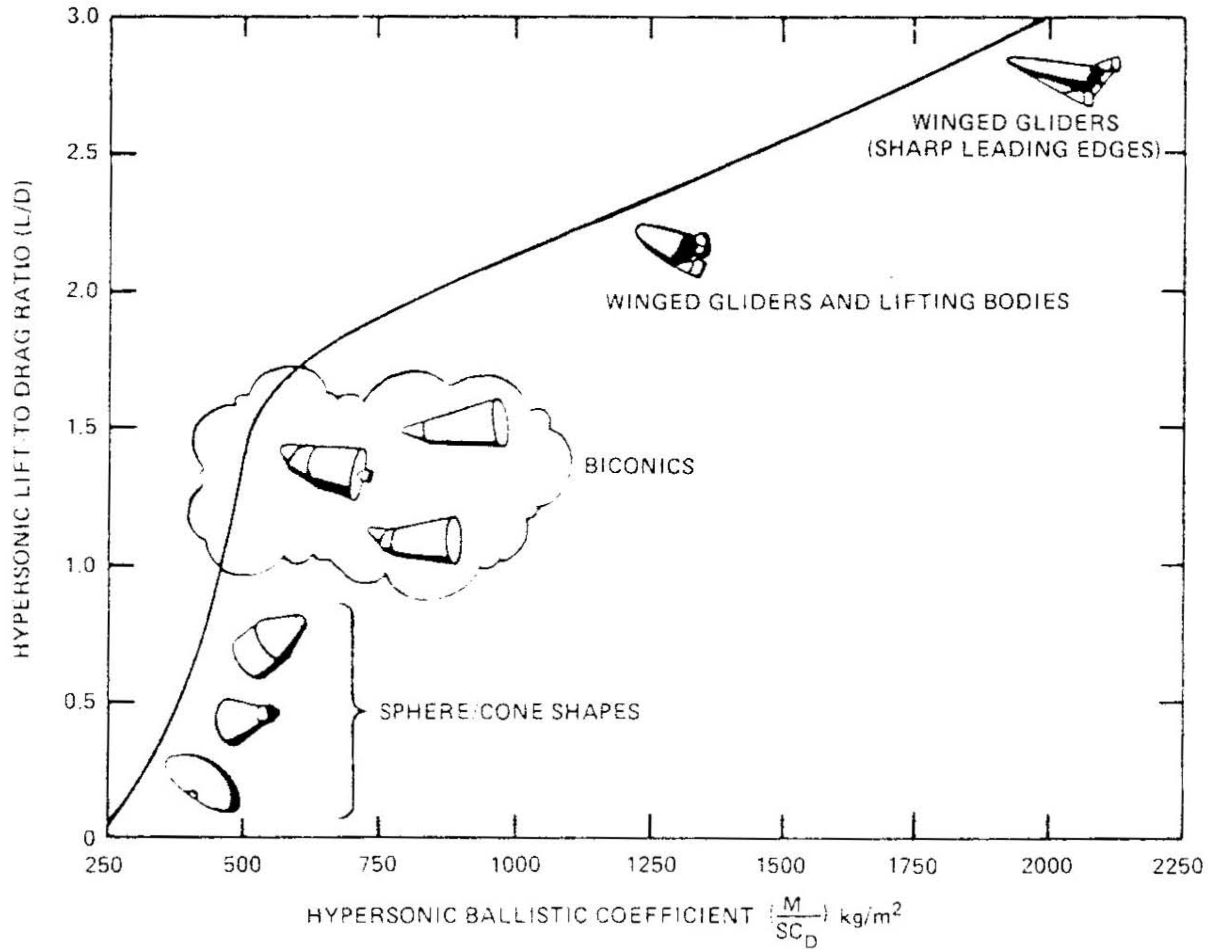


Figure 6.2: Valori tipici dei coefficienti balistici e dei rapporti portanza/resistenza per varie forme del corpo di rientro, in regime ipersonico, da [26].

$$\frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta}\;-\;\left[\left(\frac{g\,R}{v^2}\right)\;-\;1\right]\;\frac{1}{\rho\,\beta\,R}\;\simeq\;0 \tag{6.40}$$

che evidentemente dà la soluzione per l'energia cinetica adimensionale[16] (ammesso di poter assumere

[16]Si noti che la (6.41) indica che la velocità è sempre minore di $\sqrt{g\,R}$, ossia della velocità di orbitazione circolare a quota zero. Questo risultato discende dal fatto che l'uguaglianza (6.40) risulta possibile solo se il secondo termine (sottrattivo) risulta positivo, cosa che avviene solo per $v^2/(g\,R) < 1$. Per $v^2/(g\,R) > 1$ (quindi in particolare per rientri da traiettorie lunari o interplanetarie, ma anche da orbite terrestri di forte eccentricità), il secondo termine

C_B e L/D costanti)

$$\frac{v^2}{g\,R} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{2}\dfrac{1}{C_B}\dfrac{L}{D}\rho} \tag{6.41}$$

La prima delle (6.23) dà invece, sotto l'ipotesi che γ (in modulo) sia piccolo, per cui il primo termine a secondo membro prevale nettamente sul secondo, che si può quindi trascurare, l'espressione

$$\frac{d\log\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right)}{d\rho} = \frac{1}{C_B}\frac{1}{\beta\,\sin\gamma} \tag{6.42}$$

La derivata logaritmica si può ricavare dalla (6.41) come

$$\frac{d\log\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right)}{d\rho} = -\frac{\dfrac{R}{2}\dfrac{1}{C_B}\dfrac{L}{D}}{\left(1 + \dfrac{R}{2}\dfrac{1}{C_B}\dfrac{L}{D}\rho\right)} = -\frac{R}{2}\frac{1}{C_B}\frac{L}{D}\left(\frac{v^2}{g\,R}\right) \tag{6.43}$$

che sostituita nella (6.42) dà

$$-\frac{R}{2}\frac{1}{C_B}\frac{L}{D}\left(\frac{v^2}{g\,R}\right) = \frac{1}{C_B}\frac{1}{\beta\,\sin\gamma} \tag{6.44}$$

Questa permette di esplicitare l'angolo di volo, sotto l'approssimazione (6.38), come

---

risulta negativo, per cui necessariamente $d\cos\gamma \neq 0$, e la trattazione ipotizzata non è applicabile.

$$\gamma \simeq \sin\gamma = -\frac{2}{\beta\, R\, \frac{L}{D} \left(\frac{v^2}{g\, R}\right)} \tag{6.45}$$

Come si vede quindi, sotto le ipotesi adottate, sia il termine di energia cinetica adimensionale che l'angolo di volo possono essere ricavati da equazioni algebriche, per cui si può parlare di soluzione in equilibrio, nel senso che nella seconda delle (6.23) il termine di portanza eguaglia il termine differenza tra forza peso e centrifuga. La (6.45) mette tuttavia in luce il fatto che l'assunzione $\cos\gamma = 1$ è imperfetta (perché γ non è identicamente uguale a zero), per cui si parla più correttamente di soluzione in *quasi*–equilibrio.

La decelerazione cui è sottoposto il corpo di rientro si ottiene come[17]

$$a = -\frac{D'}{m} = -\frac{1}{C_B}\frac{\rho\, v^2}{2} \tag{6.46}$$

ed esprimendo v^2 dalla (6.41)

$$a = \frac{g}{\frac{2\, C_B}{\rho\, R} + \frac{L}{D}} \tag{6.47}$$

Da questa relazione si può evincere che la decelerazione alla quale è sottoposto il carico utile decresce (in modulo) all'aumentare del rapporto portanza/resistenza L/D del corpo di rientro, indicando quindi una via per ridurre le sollecitazioni su di esso (e sul suo eventuale equipaggio umano).

La tab. 6.1 riporta a titolo di esempio i rapporti L/D (medi, vedi fig. 6.3 sotto) delle capsule statunitensi Mercury e Gemini degli anni '60, e dello Space Shuttle, ed il modulo della decelerazione massima al rientro da un'orbita terrestre bassa.

[17] Anche in questo caso la traiettoria è quasi rettilinea, in quanto è stato possibile assumere $\cos\gamma$ circa costante.

	L/D	a_{max}
Mercury	$\simeq 0$	$\simeq 8$ g
Gemini	$\simeq 0{,}2$	$\simeq 5$ g
Shuttle	$\simeq 1{,}1$	$\simeq 1$ g

Tab. 6.1. Rapporti portanza/resistenza di alcuni corpi di rientro, e conseguente decelerazione massima al rientro da orbita terrestre (in modulo).

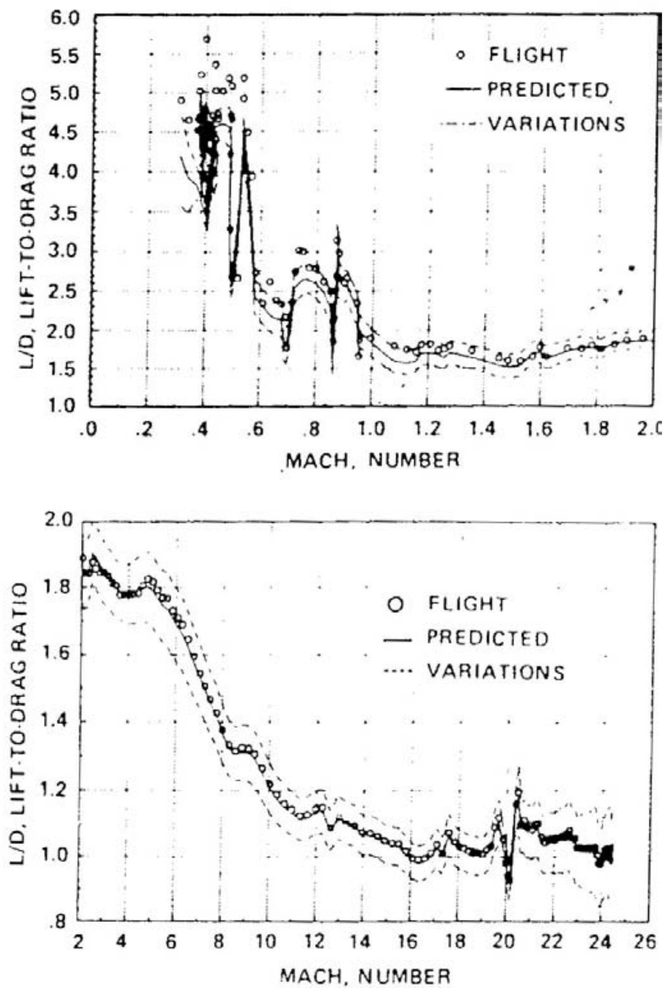


Figure 6.3: Rapporto portanza/resistenza per lo Shuttle, in funzione del numero di Mach, da [26].

Il rapporto L/D tuttavia dipende dal numero di Mach di volo, come riportato a titolo di esempio per lo Space Shuttle in fig. 6.3, la quale è scissa in due pannelli, quello in alto relativo al regime transonico, quello in basso al regime ipersonico. Si può vedere come il valore 1,1 di L/D citato in tab.

6.1 sia in effetti relativo alla prima fase del rientro, successivamente esso cresce fino ad approssimare il valore 5 nell'imminenza dell'atterraggio.

6.4 Rientro *skip*

Nella tecnica di rientro *skip* (a balzelli) il veicolo compie più manovre di ingresso ed uscita dall'atmosfera, inframezzate da fasi cosidette kepleriane (in quanto il veicolo si trova solo sotto l'effetto della forza di gravità) al difuori dell'atmosfera, come schematizzato in fig. 6.4.

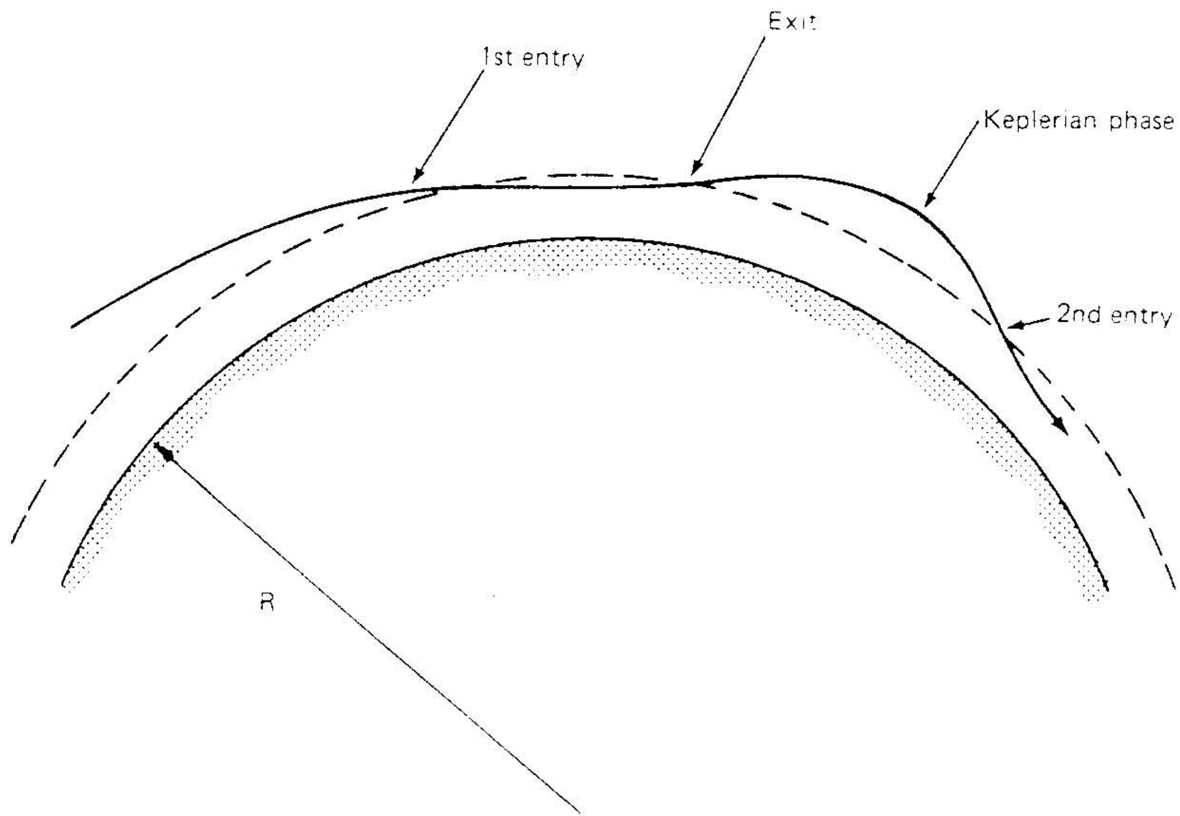


Figure 6.4: Traiettoria di rientro *skip*, da [26].

Questa tipo di rientro risulta interessante in particolare perché durante le fasi kepleriane, in cui non c'è generazione di calore in quanto il veicolo si trova fuori dell'atmosfera, questo ha la possibilità di smaltire per radiazione il calore generato per attrito nel corso del precedente 'tuffo' entro l'atmosfera. Questa possibilità è di particolare interesse nei casi in cui la quantità di energia cinetica da smaltire sia

molto elevata, ossia la velocità di rientro sia molto alta, come avviene nei casi di rientro da missioni lunari ed interplanetarie. Gli svantaggi risiedono nel fatto che i tempi di rientro sono piuttosto lunghi (il che può avere il suo peso in alcune situazioni, per esempio la durata delle missioni Apollo era limitata dal tempo per il quale le batterie del modulo di comando potevano garantire sufficiente potenza agli impianti di bordo), e che l'incertezza nel punto di atterraggio è più ampia rispetto alle tecniche esaminate sopra.

Per trattare analiticamente il rientro *skip*, introduciamo alcune ipotesi semplificative del tipo di quelle già adottate nell'analisi degli altri tipi di rientro. Adottiamo ancora l'approssimazione (6.28), che come abbiamo osservato per il caso di rientro balistico, equivale ad assumere forza peso nulla e pianeta piatto, però in questo caso assumiamo, come nel rientro planato in quasi–equilibrio, che la portanza L sia maggiore di zero. Le equazioni del moto (6.23) si riducono allora alla forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right)}{d\rho} = \dfrac{1}{C_B}\,\dfrac{1}{\beta\,\sin\gamma}\left(\dfrac{v^2}{g\,R}\right) \\ \dfrac{d\cos\gamma}{d\rho} = \dfrac{L}{D}\,\dfrac{1}{C_B}\,\dfrac{1}{2\,\beta} \end{array} \right. \qquad (6.48)$$

Dalla seconda equazione si può in particolare osservare che il secondo membro è sempre positivo, per cui tale deve risultare la derivata a primo membro. Ne consegue che scendendo nell'atmosfera (incontrando quindi densità atmosferiche crescenti, cioè $d\rho > 0$) con un angolo di volo diverso da zero (quindi $\cos\gamma < 1$), la traiettoria del corpo subirà un $d\cos\gamma > 0$, ossia l'angolo di volo (negativo) crescerà fino a raggiungere il valore zero ($\cos\gamma = 1$); da questo punto in poi il corpo salirà nell'atmosfera (incontrando quindi densità decrescenti, per cui $d\rho < 0$) per cui risulterà $d\cos\gamma < 0$, ossia l'angolo di volo (positivo) andrà ulteriormente crescendo fino all'uscita dall'atmosfera. Assumendo C_B e L/D costanti, la seconda delle (6.48) può poi essere integrata tra il punto di ingresso nell'atmosfera ed il punto generico per dare

$$\cos\gamma = \cos\gamma_e + \frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta}\,(\rho - \rho_e) \simeq \cos\gamma_e + \frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta}\,\rho \qquad (6.49)$$

avendo approssimato a zero la densità atmosferica all'ingresso. Espandiamo poi il differenziale a primo membro della prima delle (6.48)

$$2\,\frac{v}{g\,R}\,\frac{dv}{d\rho} \;=\; \frac{1}{C_B}\,\frac{1}{\beta\,\sin\gamma}\,\left(\frac{v^2}{g\,R}\right) \qquad (6.50)$$

e semplificando

$$\frac{dv}{d\rho} \;=\; \frac{1}{2\,C_B}\,\frac{1}{\beta\,\sin\gamma}\,v \qquad (6.51)$$

ed espandiamo anche il differenziale a primo membro della seconda delle (6.48)

$$-\,\sin\gamma\,\frac{d\gamma}{d\rho} \;=\; \frac{L}{D}\,\frac{1}{C_B}\,\frac{1}{2\,\beta} \qquad (6.52)$$

Dividendo membro a membro le (6.51,6.52) si ottiene una relazione tra i differenziali di v e γ

$$\frac{dv}{d\gamma} \;=\; -\,\frac{v}{L/D} \qquad (6.53)$$

ossia

$$\frac{dv}{v} \;=\; -\,\frac{1}{L/D}\,d\gamma \qquad (6.54)$$

che integrata tra il punto di ingresso nell'atmosfera ed il punto generico dà

$$\log\frac{v}{v_e} \;=\; \frac{\gamma_e\,-\,\gamma}{L/D} \qquad (6.55)$$

e quindi la velocità in un punto generico della traiettoria di rientro.

$$v \; = \; v_e \; \exp\left(\frac{\gamma_e \, - \, \gamma}{L/D}\right) \tag{6.56}$$

All'ingresso nell'atmosfera abbiamo $h = h_e$, quindi $\rho = \rho_e$, e $\gamma = \gamma_e$, mentre all'uscita avremo ancora $h = h_e$, $\rho = \rho_e$ ma $\gamma = -\,\gamma_e$ come si può evincere dalla (6.49), ricordando che il coseno è una funzione pari. Dalla (6.56) si ricava allora che il rapporto tra la velocità all'uscita ed all'ingresso di un singolo 'tuffo' nell'atmosfera è

$$\frac{v_{uscita}}{v_e} \; = \; \exp\left(\frac{2\,\gamma_e}{L/D}\right) \tag{6.57}$$

la quale indica, essendo γ_e negativo, che la velocità all'uscita è minore di quella all'entrata, ossia che nell'immersione nell'atmosfera è stata dissipata energia cinetica. Mediante ripetuti tuffi nell'atmosfera è quindi possibile ridurre progressivamente la velocità del corpo di rientro; nelle fasi kepleriane, come detto, parte dell'energia cinetica trasformatasi in calore può essere smaltita per radiazione. L'accelerazione massima durante ogni singolo tuffo si ha in prossimità della condizione di *pull–up*, ossia quando il corpo di rientro raggiunge un angolo di volo nullo, per poi successivamente risalire. Occorre verificare, attraverso la (6.49), che la condizione di *pull–up* si verifichi per $\rho < \rho_{sl}$, ossia prima dell'impatto al suolo.

L'accelerazione alla quale il corpo è sottoposto è la somma di due componenti ortogonali dovute alla resistenza ed alla portanza[18], che possono essere quindi espresse rispettivamente come D/m e L/m. Il modulo dell'accelerazione (al quale premettiamo il segno meno per ricordare che si tratta di una decelerazione) risulta pertanto

[18]Osserviamo che derivare l'espressione della velocità secondo la (6.20) dà la sola componente di accelerazione dovuta alla variazione del modulo della velocità, cioè alla resistenza; per avere l'espressione completa dell'accelerazione occorre considerare in questo caso, in cui la traiettoria è marcatamente *non* rettilinea, anche la sua componente dovuta alla variazione della direzione della velocità, cioè alla portanza, come appunto faremo nel seguito.

$$a \;=\; -\,\frac{\sqrt{L^2\,+\,D^2}}{m} \;=\; -\,\frac{D}{m}\sqrt{1\,+\,\left(\frac{1}{L/D}\right)^2} \;=$$

$$=\;-\,c_D'\,\frac{\rho\,v^2}{2}\,\frac{S}{m}\sqrt{1\,+\,\left(\frac{1}{L/D}\right)^2} \;=\; -\,\frac{1}{C_B}\,\frac{\rho\,v^2}{2}\sqrt{1\,+\,\left(\frac{1}{L/D}\right)^2} \qquad (6.58)$$

dove sono state utilizzate le (6.4,6.15). Per individuare l'accelerazione al *pull–up*, cioè per $\gamma = 0$, occorre esprimere tanto v che ρ in funzione di γ, attraverso le (6.56,6.49), la seconda delle quali dà

$$\rho \;=\; (\cos\gamma \,-\, \cos\gamma_e)\,\frac{2\,\beta\,C_B}{L/D} \qquad (6.59)$$

Sostituendo quindi nella (6.60) si ottiene l'espressione cercata

$$a \;=\; \sqrt{1\,+\,\left(\frac{1}{L/D}\right)^2}\,(\cos\gamma \,-\, \cos\gamma_e)\,\beta\,v_e^2\;\exp\left[\frac{2\,(\gamma\,-\,\gamma_e)}{L/D}\right] \qquad (6.60)$$

il cui massimo si verifica come detto in prossimità del *pull–up*, cioè per $\gamma = 0$, per cui

$$a_{pull-up} \;=\; \sqrt{1\,+\,\left(\frac{1}{L/D}\right)^2}\,(1\,-\,\cos\gamma_e)\,\beta\,v_e^2\;\exp\left(\frac{2\,\gamma_e}{L/D}\right) \qquad (6.61)$$

e quindi

$$a_{max} \;\simeq\; a_{pull-up} \qquad (6.62)$$

Per l'esattezza, la decelerazione massima si ha poco prima del *pull–up*, ma la differenza è inessenziale ai fini della determinazione di tale massimo. Anche in questo caso si può osservare che la decelerazione massima decresce (in modulo) all'aumentare del rapporto portanza/resistenza L/D del corpo di rientro.

6.5 Riscaldamento aerodinamico

Abbiamo detto che l'energia cinetica che il corpo di rientro dissipa attraverso l'atmosfera si trasforma in calore, che porta ad un riscaldamento del corpo stesso. Questo pone due tipi di problemi:

1. la quantità di calore totale che il corpo assorbe durante il rientro, ossia il cosidetto carico termico totale, che indichiamo con Q, ne determina un innalzamento della temperatura. Indicando con m la massa del corpo di rientro, con c un valore rappresentativo 'globale' del suo calore specifico, ne segue che l'innalzamento ΔT di temperatura, in assenza di meccanismi di rimozione del calore, si ottiene dall'eguaglianza

$$Q = m\,c\,\Delta T \tag{6.63}$$

   che dà

$$\Delta T = \frac{Q}{m\,c} \tag{6.64}$$

2. il flusso termico specifico (cioè la quantità di calore che il corpo di rientro riceve per unità di tempo per unità di superficie), che indichiamo con $\vec{q}$ (ricordiamo che è una grandezza vettoriale), è legato al gradiente di temperatura che si stabilisce attraverso le pareti del corpo di rientro dall'eguaglianza

$$\vec{q} = -\lambda\,\nabla T \tag{6.65}$$

   dove con λ si è indicato un coefficiente di conduzione termica rappresentativo per le pareti di tale corpo. Elevati gradienti di temperatura provocano forti sforzi meccanici nel materiale per effetto della differente espansione termica che si ha sulle due facce, esterna ed interna, del corpo. L'unico mezzo per limitare tale problema è di contenere il modulo del flusso termico, che determina evidentemente il gradiente di temperatura secondo la

$$\nabla T \; = \; -\frac{\vec{\dot{q}}}{\lambda} \tag{6.66}$$

Nell'individuare la tecnica di rientro più opportuna occorre quindi tenere presente la necessità di soddisfare entrambi questi requisiti. Spesso si dovrà puntare ad un compromesso, per esempio il rientro planato dà valori di $\dot{q}$ più bassi, ma valori di Q più alti.

Il riscaldamento del veicolo durante il rientro avviene per scambio termico sia per convezione (da parte dell'atmosfera circostante, fortemente riscaldata dall'onda d'urto che precede il veicolo), che per radiazione da parte di questi stessi gas ad alta temperatura (questo effetto però diventa importante soprattutto per velocità d'ingresso v_e superiori ai 10 km/s, quindi per rientri da missioni lunari o interplanetarie). Il massimo riscaldamento si ha in corrispondenza dei punti di ristagno del flusso.

6.5.1 Tecniche di protezione termica

Il progetto di un veicolo destinato al rientro atmosferico, e la scelta della traiettoria di rientro, coinvolgono numerose discipline quali l'aerodinamica, lo scambio termico, la chimica (per via delle reazioni chimiche che l'atmosfera subisce quando viene portata ad alta temperatura dall'onda d'urto che precede il corpo), la meccanica del volo, l'analisi strutturale (per effetto degli sforzi imposti dalla pressione dinamica e dalla dilatazione differenziale), la scienza dei materiali.

Per limitare l'innalzamento di temperatura del corpo di rientro sono disponibili tre tecniche:

1. pozzo di calore (*heat sink*): si sfrutta la capacità termica $m\,c$ del corpo per contenere l'innalzamento di temperatura, secondo la (6.64). È chiaro tuttavia che, dato il valore del calore specifico rappresentativo, non si può pensare di aumentare la massa del corpo di rientro per contenerne l'aumento di temperatura. Quindi è un effetto che è comunque presente, ma non può essere tagliato a misura per le esigenze di protezione termica specifiche di un dato corpo di rientro. Questo approccio richiede materiali in grado di resistere ad alte temperature, e con elevato calore specifico, sempre per la (6.64). A titolo di esempio, riportiamo i valori della temperatura di fusione e del calore specifico per due materiali di possibile utilizzo quali l'alluminio (T_{fus} = 933 K, ma già a 600 K circa le sue proprietà meccaniche risultano non più accettabili, e c = 897 J kg^{-1} K^{-1} a temperatura ambiente – ovviamente il calore specifico dipende dalla temperatura), ed il titanio (T_{fus} = 1941 K, c = 523 J kg^{-1} K^{-1} a temperatura ambiente). Da questi dati si evince che questa tecnica può essere utilizzata per smaltire il calore solo quando il carico termico totale è relativamente limitato, come è stato per esempio il caso dei primi

voli suborbitali delle capsule statunitensi Mercury, nei quali la velocità massima era limitata a 2290 m/s (nei successivi voli orbitali si è dovuto invece ricorrere ad una protezione ablativa, essendo la velocità al rientro dell'ordine dei 7800 m/s, quindi il carico termico maggiore di circa di un ordine di grandezza). Questo meccanismo di smaltimento del calore è comunque sempre presente in tutti i tipi di rientro, e porta ad innalzamento della temperatura del corpo che può richiedere una refrigerazione attiva (cioè mediante un liquido refrigerante) durante la fase di volo, o comunque subito dopo (per esempio, lo Space Shuttle subito dopo l'atterraggio viene collegato a linee di raffreddamento a freon per smaltire il calore trasmesso dalle piastrelle protettive);

2. radiazione: fatta esclusione del caso in cui la velocità di ingresso nell'atmosfera è superiore ai 10 km/s circa (nei quali come si è visto si ha radiazione da parte dell'atmosfera portata ad alta temperatura dall'onda d'urto *verso* il corpo di rientro), si può cercare di irradiare il calore assorbito dal corpo di rientro verso l'ambiente esterno. In tal caso la temperatura di parete del corpo di rientro T_w (ammettendo in prima approssimazione di poter adottare un valore rappresentativo per tutto il corpo) è determinata da un bilancio tra il calore che il corpo assorbe per convezione, proporzionale alla differenza $T_0 - T_w$, essendo T_0 la temperatura di ristagno corrispondente alle condizioni di volo, ed il calore che irradia, proporzionale invece alla differenza $T_w^4 - T_{amb}^4$, dove con T_{amb} si è indicato un valore rappresentativo della temperatura ambiente (anche questa in realtà è ovviamente non uniforme, potendo variare tra i circa 4 K dello sfondo della volta celeste, ai circa 300 K della Terra, etc.; comunque data la dipendenza dalla quarta potenza della temperatura, il contributo di tali fonti a bassa temperatura è sostanzialmente trascurabile). Se il flusso termico che incide sul corpo di rientro è abbastanza contenuto, l'equilibrio tra convezione e radiazione si instareurà ad una T_w accettabile. È comunque richiesto un isolamento termico tra la superficie esterna del corpo, che si trova appunto ad alta temperatura per poter irradiare, e la sua superficie interna, in modo da limitare il flusso termico trasmesso verso l'interno del veicolo. Ad esempio, lo Space Shuttle è rivestito nella parte inferiore di piastrelle di silice porosa, a bassissimo coefficente di conducibilià termica. L'equilibrio tra convezione e radiazione si stabilisce a T_w relativamente basse se il rientro avviene attraverso una lunga planata ad alta quota. La tecnica di rientro *skip*, come abbiamo detto, risulta poi particolarmente adatta allo smaltimento del calore per radiazione durante le fasi kepleriane al difuori dell'atmosfera;

3. protezione ablativa: si possono rivestire le parti più critiche del corpo di rientro con un materiale ablativo che sublima per effetto delle alte temperature raggiunte, asportando in tal modo il calore latente di sublimazione, ed in più, creando uno strato di gas freddo (proveniente appunto dalla sublimazione) che lambisce il corpo, ostacolando pertanto lo scambio di calore

per convezione verso il corpo. Il materiale ablativo è generalmente costituito da una matrice di vetroresina, con calore di sublimazione che può superare i 10 MJ per kg di materiale ablativo. Per quanto osservato al punto precedente, tale materiale conviene abbia una bassa conducibilità termica, per cui si preferiscono materiali porosi, quindi a bassa densità. Questo approccio è quello che generalmente risulta nella più bassa massa del corpo di rientro. Un inconveniente della protezione ablativa è che essa rende problematica la riutilizzabilità del corpo di rientro (la protezione andrebbe ricostituita integralmente ad ogni volo). Protezioni ablative sono state utilizzate sulle capsule statunitensi Mercury (per i voli orbitali), Gemini, Apollo (per le quali in particolare il flusso termico specifico al rientro dalla traiettoria cislunare era intorno ai 5 MW/m^2), sulle russe Soyuz, nonché su quelle cinesi.

6.5.2 Flusso termico convettivo

Abbiamo osservato che la temperatura di parete T_w è determinata dall'interazione tra scambio termico per convezione e per radiazione. Una descrizione dettagliata di questi fenomeni richiederebbe di trattare la miscela gassosa che lambisce il corpo di rientro come un gas chimicamente reagente (per effetto dell'alta temperatura alla quale è sottoposto), in condizioni di chimica a velocità finita (ossia non in equilibrio chimico, ed inoltre nemmeno in equilibrio vibrazionale, ossia i calori specifici delle singole specie chimiche che compongono la miscela non sono semplicemente una funzione della temperatura, ma seguono un'evoluzione temporale), soggetto a ionizzazione (per lo stesso motivo), e radiazione. Occorrebbe poi tener conto degli effetti catalitici alla superficie del corpo, e della scabrosità delle superfici stesse.

In questo contesto seguiremo invece un approccio semplificato il quale, pur senza avere nessuna pretesa di quantificare rigorosamente i flussi termici, risulta utile a conseguire una visione d'insieme dei problemi. Assumeremo quindi che la convezione sia il meccanismo di scambio termico dominante (il che, come si può evincere da quanto precedentemente esposto, risulta dubbio per rientri lunari/interplanetari), e che il flusso gassoso sia assimilabile a quello di un gas perfetto inerte. Indichiamo con h il coefficiente di scambio termico convettivo, con T_{oe} la temperatura totale al bordo esterno (*outer edge*) dello strato limite termico (che coincide con la temperatura totale corrispondente alla velocità di volo v_0), con $Nu = \mathsf{h}\, D/\lambda$ il numero di Nusselt, essendo D una dimensione caratteristica del corpo di rientro, ed infine con h_0 l'entalpia totale. Il flusso termico specifico alla parete può quindi essere espresso come

$$\dot{q}_w = \mathsf{h}\,(T_{oe} - T_w) = \frac{\lambda\, Nu}{D}\,(T_{oe} - T_w) \qquad (6.67)$$

ed assumendo il calore specifico c_p costante si può far comparire, al posto del salto di temperatura, il salto di entalpia tra flusso al confine dello strato limite termico (di entalpia $h_{oe} = h_0$) e parete:

$$\dot{q}_w = \frac{\lambda}{c_p} \frac{Nu}{D} (h_0 - h_w) \tag{6.68}$$

Moltiplicando e dividendo per $(\rho\, v\, \mu)_0$, dove l'indice indica le condizioni di volo, si ha

$$\dot{q}_w = \frac{\lambda}{c_p\, \mu} Nu \frac{\mu}{\rho_0\, v_0\, D} \rho_0\, v_0\, h_0 \left(1 - \frac{h_w}{h_0}\right) =$$

$$= \frac{Nu}{Re\, Pr} \rho_0\, v_0\, h_0 \left(1 - \frac{h_w}{h_0}\right) \tag{6.69}$$

dove Re e Pr indicano evidentemente i numeri di Reynolds (riferito alle condizioni di volo) ed il numero di Prandtl. Possiamo introdurre il numero di Stanton, definito come

$$St = \frac{Nu}{Re\, Pr} \tag{6.70}$$

e riscrivere perciò la (6.69) come

$$\dot{q}_w = St\, \rho_0\, v_0\, h_0 \left(1 - \frac{h_w}{h_0}\right) \tag{6.71}$$

In questa espressione, l'entalpia totale è[19]

[19] L'entalpia sensibile è ottenuta integrando la relazione $dh = c_p\, dT$ sotto l'ipotesi $c_p = \text{cost}$, e ponendo in particolare uguale a zero la relativa costante di integrazione.

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} = h \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right) \tag{6.72}$$

Ad alti numeri di Mach di volo, il termine cinetico risulta assolutamente prevalente rispetto all'entalpia sensibile, per cui possiamo assumere

$$h_0 \simeq \frac{v^2}{2} \tag{6.73}$$

$$h_w \ll h_0 \tag{6.74}$$

da cui la forma

$$\dot{q}_w \simeq St \, \frac{\rho_0 \, v_0^3}{2} \tag{6.75}$$

Si noti che aver trascurato, in base alla (6.74), il termine sottrattivo $-h_w/h_0$ nella (6.71) porta a sovrastimare lievemente il flusso termico, per cui risulta un'ipotesi conservativa.

Il numero di Stanton può essere legato al coefficiente d'attrito, detto anche fattore d'attrito di Fanning, definito come[20]

$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho \, v^2/2} \tag{6.76}$$

essendo τ_w lo sforzo d'attrito alla parete e $\rho \, v^2/2$ la pressione dinamica, attraverso l'analogia di Reynolds, vedi ad esempio [27]

[20] Il fattore d'attrito di Fanning permette di esprimere la caduta di pressione su una tubazione circolare di diametro d e lunghezza l, $\Delta p = \tau_w \, A_{laterale}/A_{trasversale} = \tau_w \, \pi \, d \, l/(\pi \, d^2/4) = 4 \, \tau_w \, l/d$, come $\Delta p = 2 \, c_f \, \rho \, v^2 \, l/d$. Utilizzando invece il fattore d'attrito di Darcy–Weisenbach f' si ha $\Delta p = f' \, (\rho \, v^2/2) \, l/d$, dalla quale si deduce la relazione tra i due fattori d'attrito, $f' = 4 \, c_f$.

$$St = \frac{c_f}{2} \tag{6.77}$$

Questa relazione risulta valida con discreta approssimazione, per esempio per flussi d'aria con numeri di Mach compresi tra valori subsonici fino a $M = 16$ si trova

$$\frac{St}{c_f/2} = 1,24 \div 1,27 \tag{6.78}$$

Utilizziamo qui la relazione (6.77) per dare un'espressione di primo tentativo per il flusso termico specifico. Si osservi incidentalmente che il numero di Reynolds $Re = (\rho\, v\, D/\mu)_0$ corrispondente alle condizioni di rientro risulta contenuto nella prima fase del rientro nella quale, pur essendo la velocità v_0 molto elevata, la densità ρ_0 risulta estremamente bassa, per cui si ha effettivamente flusso laminare.

Il coefficiente d'attrito c_f è funzione del numero di Reynolds e della rugosità della superficie, espressa come rapporto tra altezza tipica di un'asperità ed una dimensione caratteristica, come risulta dal diagramma di Moody, riportato in fig. 6.5. In particolare, per flussi laminari è $c_f = 16/\mathrm{Re}$, mentre per flussi turbolenti sia ha un andamento decrescente con asintoto orizzontale per alti Re, con la rugosità a parametro (c_f aumenta con essa). In ogni caso, l'ordine di grandezza di c_f è tipicamente intorno a 10^{-2}.

Introducendo la (6.77) nella (6.75) si ottiene quindi un'espressione per il valore locale del flusso termico specifico ad alto numero di Mach di volo

$$\dot{q}_w \simeq c_f\, \frac{\rho_0\, v_0^3}{4} \tag{6.79}$$

Il flusso termico su tutto il corpo di rientro, ovverosia la potenza termica assorbita dal corpo, si ottiene allora come integrale della (6.79) esteso a tutta la superficie esterna S_w del corpo (l'indice w sta per *wetted*, cioè superficie bagnata)

$$\dot{Q} = \int_{S_w} \dot{q}_w\, dS \simeq c_F\, \frac{\rho_0\, v_0^3}{4}\, S_w \tag{6.80}$$

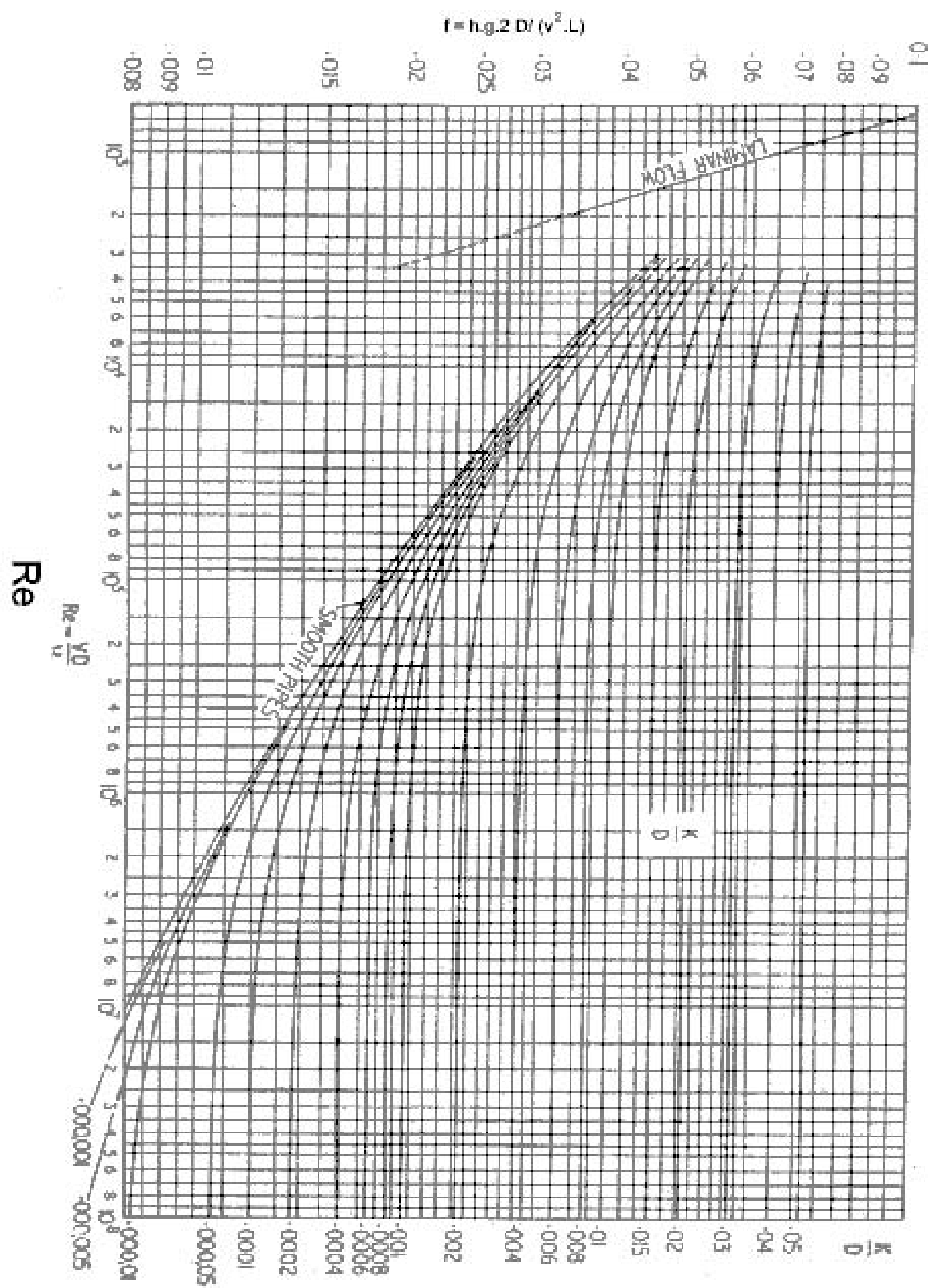


Figure 6.5: Diagramma di Moody, da [28].

avendo introdotto un valore rappresentativo c_F del coefficiente d'attrito c_f mediato su tutta la superficie bagnata del corpo

$$c_F \;=\; \frac{1}{S_w}\int_{S_w} c_f\,dS \tag{6.81}$$

6.5.3 Carico termico totale

Calcoliamo ora l'energia termica Q assorbita dal corpo durante l'intera fase di rientro, al ridursi quindi della sua velocità dal valore all'ingresso nell'atmosfera v_e a zero (anche se abbiamo osservato che la validità del modello è quantomeno dubbia a basse velocità). Possiamo esprimere il contributo dQ a Q dovuto ad una variazione infinitesima di velocità dv come

$$\frac{dQ}{dv} \;=\; \frac{dQ}{dt}\,\frac{dt}{dv} \tag{6.82}$$

dove la diminuzione del modulo della velocità con il tempo è data, dalla seconda delle (6.2) con contributo della forza peso nullo (come è stato esplicitamente assunto nei casi di rientro balistico e *skip*, ed implicitamente anche per rientro planato, in quanto si è assunto che il termine di resistenza ridotta sovrasti quello relativo alla componente tangenziale della forza peso ridotta, grazie all'assunzione di $|\,\gamma\,|$ piccolo), da

$$dv/dt \;=\; -\,\frac{D}{m} \tag{6.83}$$

per cui

$$\frac{dQ}{dv} \;=\; -\,\frac{\dot{Q}}{D/m} \;=\; -\,\frac{m}{c_D\,S}\,\frac{2\,\dot{Q}}{\rho\,v^2} \tag{6.84}$$

dove la resistenza D è stata espressa tramite la (6.4). Si osservi che la derivata è negativa in quanto il calore assorbito dal corpo aumenta al ridursi della velocità. Si può introdurre il coefficiente

balistico (6.15) ottenendo

$$\frac{dQ}{dv} = -\frac{c_F\, C_B}{2} S_w\, v \tag{6.85}$$

Supponendo che il corpo rallenti effettivamente fino a velocità nulla, il carico termico totale si può ottenere integrando da $v = v_e$ a $v = 0$:

$$Q = \frac{c_F\, C_B}{4} S_w\, v_e^2 \tag{6.86}$$

Questo carico termico può essere rapportato all'energia cinetica posseduta dal corpo all'ingresso nell'atmosfera, dando quindi la frazione di energia cinetica assorbita dal corpo sotto forma di calore

$$\frac{Q}{m\, v_e^2/2} = \frac{c_F\, C_B}{2\, m} S_w = \frac{c_F}{2\, c_D} \frac{S_w}{S} \tag{6.87}$$

Da questa relazione si evince che per limitare il carico termico occorre utilizzare forme del corpo di rientro con rapporto tra superficie bagnata e superficie trasversale S_w/S basso, e coefficiente di resistenza aerodinamica c_D alto. Questo indica l'opportunità di utilizzare corpi di forma *non* aerodinamica ma al contrario 'ottusa' (*blunt–bodies*), che per l'appunto danno alto c_D e basso rapporto S_w/S (quest'ultimo in particolare risulta minimo, dato il volume, per corpi di forma sferica).

6.5.4 Flusso termico specifico

Dalla (6.80) si può ottenere un valore del flusso termico specifico, mediato (*averaged*) sulla superficie del corpo, semplicemente dividendo per la superficie bagnata

$$\dot{q}_{w,av} = \frac{\dot{Q}}{S_w} = c_F\, \frac{\rho\, v^3}{4} \tag{6.88}$$

Il flusso termico specifico può quindi essere calcolato conoscendo il profilo di rientro, ossia la relazione che dà come varia la velocità in funzione della densità. Nel seguito l'espressione del flusso termico

specifico viene specializzata ai casi di rientro balistico, planato, *skip*, determinando in particolare la condizione (denominata 'critica', ed indicata con l'indice *crit*) durante il rientro in cui esso assume il valore massimo.

Flusso termico specifico per rientro balistico

In questo caso la relazione tra velocità e densità è data dalla (6.33), che sostituita nella (6.88) dà

$$\dot{q}_{w,av} = \frac{c_F\, v_e^3}{4}\, \rho\, \exp\left(\frac{3}{2\,\beta\, \sin\gamma_e} \frac{1}{C_B}\, \rho \right) \tag{6.89}$$

Per determinare il massimo, risulta conveniente ricavare prima il logaritmo di questa espressione, e poi ricercarne il massimo

$$\log(\dot{q}_{w,av}) = \log \frac{c_F\, v_e^3}{4} + \log\rho + \frac{3}{2\,\beta\, \sin\gamma_e} \frac{1}{C_B}\, \rho \tag{6.90}$$

La derivata di questa espressione rispetto alla variabile indipendente (la densità) risulta

$$\frac{d \log(\dot{q}_{w,av})}{d\rho} = \frac{1}{\rho} + \frac{3}{2\,\beta\, \sin\gamma_e} \frac{1}{C_B} \tag{6.91}$$

Essa si annulla per un valore 'critico' della densità (dal quale si potrebbe determinare la quota critica dalla (6.13), e la velocità critica dalla (6.33))

$$\rho_{crit} = -\frac{2}{3}\, \beta\, C_B\, \sin\gamma_e \tag{6.92}$$

ed il conseguente valore critico del flusso termico specifico risulta

$$\dot{q}_{w,crit} = -\frac{\beta\, c_F\, C_B\, \sin\gamma_e}{6\, e}\, v_e^3 \tag{6.93}$$

essendo e il numero di Nepero. Da questa espressione si può osservare che il valore del flusso critico aumenta con il valore assoluto di γ_e, e con il coefficiente balistico C_B (ovvero, detto in altro modo, diminuisce all'aumentare del prodotto $c_D\,S$). Quest'ultima osservazione suggerisce di utilizzare *blunt bodies* di alto c_D e grande superficie trasversale. Il secondo requisito è in qualche modo differente da quello posto dalla minimizzazione del carico termico totale, vedi (6.87); là si richiedeva minimo rapporto S_w/S (quindi la configurazione ottima risultava sferica) mentre qui si richiede massima S, cioè forme in qualche misura schiacciate, vedi configurazioni in basso a sinistra della fig. 6.2. La scelta della configurazione deriverà da un compromesso tra minimizzazione del carico termico totale, che porta ad una configurazione sferica, e del flusso termico specifico, che porta ad una configurazione più schiacciata. Il tutto va poi ovviamente pesato con i vincoli imposti sulla forma del corpo dalla missione per il quale il corpo di rientro è progettato.

Flusso termico specifico per rientro planato in quasi–equilibrio

In questo caso la relazione tra velocità e densità è data dalla (6.41), che riscriviamo come

$$v^2 \;=\; \frac{g\,R}{1 \,+\, \dfrac{R}{2\,C_B}\,\dfrac{L}{D}\,\rho} \tag{6.94}$$

dalla quale si ricava il flusso termico specifico attraverso la (6.88)

$$\dot{q}_{w,av} \;=\; \frac{c_F}{4}\,\rho\,\left(\frac{g\,R}{1 \,+\, \dfrac{R}{2\,C_B}\,\dfrac{L}{D}\,\rho}\right)^{3/2} \tag{6.95}$$

Per determinarne il valore critico ne consideriamo ancora il logaritmo

$$\log(\dot{q}_{w,av}) \;=\; \log\frac{c_F}{4} \,+\, \log\rho \,+\, \frac{3}{2}\log\,(g\,R) \,-\, \frac{3}{2}\log\left(1 \,+\, \frac{R}{2\,C_B}\,\frac{L}{D}\,\rho\right) \tag{6.96}$$

e la derivata di questo rispetto a ρ

$$\frac{d \log(\dot{q}_{w,av})}{d\rho} = \frac{1}{\rho} - \frac{3}{2} \frac{\dfrac{R}{2\,C_B}\,\dfrac{L}{D}}{1 + \dfrac{R}{2\,C_B}\,\dfrac{L}{D}\,\rho} \tag{6.97}$$

la quale si annulla per

$$\rho_{crit} = \frac{4\,C_B}{R\,L/D} \tag{6.98}$$

Si potrebbero ancora trovare, attraverso le (6.13,6.94) i valori critici di quota e velocità. Il valore critico del flusso termico specifico risulta poi, sostituendo la (6.98) nella (6.95)

$$\dot{q}_{w,crit} = \frac{c_F\,C_B}{L/D} \sqrt{\frac{g^3\,R}{27}} \tag{6.99}$$

Si osserva che ancora il valore critico del flusso termico specifico aumenta con C_B (o equivalentemente diminuisce con $c_D\,S$), ma, a differenza del caso precedente, esso diminuisce con il rapporto L/D. Conviene quindi adottare corpi di rientro che presentino una certa portanza per diminuire $\dot{q}_{w,crit}$; questo tuttavia in genere comporta anche C_B più alti, vedi fig. 6.2, per cui al solito occorre ricercare un compromesso. Si noti che l'espressione (6.99) risulta apparentemente indipendente dalla velocità d'ingresso nell'atmosfera v_e; tuttavia, occorre osservare che in questo tipo di rientro si è assunto equilibrio tra i termini di forza peso e centrifuga, il che equivale a dire che la velocità all'ingresso nell'atmosfera (quando il termine di portanza è ancora nullo) è $(g\,R)^{1/2} = (\mu/R)^{1/2}$, cioè pari alla velocità di orbitazione circolare.

Flusso termico specifico per rientro *skip*

Per rientro *skip* conviene prima esprimere la velocità attraverso il valore dell'angolo di volo secondo la (6.56), e poi legare l'angolo di volo (o meglio, il suo coseno) alla densità attraverso la (6.49). In

questo caso conviene trovare il massimo del flusso termico specifico rispetto all'angolo di volo, e poi trovare il valore corrispondente della densità critica. La densità può essere esplicitata rispetto a ρ dalla (6.49) come

$$\rho \;=\; \frac{2\,\beta\,C_B}{L/D}\,(\cos\gamma\,-\,\cos\gamma_e) \tag{6.100}$$

La (6.88) dà allora il flusso termico specifico, questa volta in funzione di γ

$$\dot{q}_{w,av} \;=\; \frac{c_F\,v_e^3}{2}\,\frac{\beta\,C_B}{L/D}\,(\cos\gamma\,-\,\cos\gamma_e)\;\exp\left(3\,\frac{\gamma_e\,-\,\gamma}{L/D}\right) \tag{6.101}$$

Consideriamo al solito il logaritmo di questa espressione

$$\log(\dot{q}_{w,av}) \;=\; \log\left(\frac{c_F\,v_e^3}{2}\,\frac{\beta\,C_B}{L/D}\right)\;+\;\log(\cos\gamma\,-\,\cos\gamma_e)\;+\;3\,\frac{\gamma_e\,-\,\gamma}{L/D} \tag{6.102}$$

e ricerchiamone il massimo imponendo che la derivata rispetto a γ sia nulla:

$$\frac{d\log(\dot{q}_{w,av})}{d\gamma} \;=\; -\,\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma\,-\,\cos\gamma_e}\;-\;\frac{3}{L/D} \tag{6.103}$$

Per manipolare questa espressione, facciamo affidamento sul fatto che γ sia piccolo, per cui valgono le approssimazioni (la seconda in particolare ricavata da un'espansione in serie di Taylor di punto iniziale γ_e)

$$\sin\gamma \;\simeq\; \gamma \tag{6.104}$$

$$\cos\gamma\,-\,\cos\gamma_e \;\simeq\; -\,\sin\gamma_e\,(\gamma\,-\,\gamma_e) \;\simeq\; -\,\gamma_e(\gamma\,-\,\gamma_e) \tag{6.105}$$

La (6.103) si scrive quindi

$$\frac{d\log(\dot{q}_{w,av})}{d\gamma} \simeq \frac{\gamma}{\gamma_e\,(\gamma - \gamma_e)} - \frac{3}{L/D} \qquad (6.106)$$

la quale si annulla per (si osservi che $3\,\gamma_e/L/D \ll 1$)

$$\gamma = \frac{3\,\gamma_e}{L/D}\,(\gamma - \gamma_e) \qquad (6.107)$$

da cui

$$\left(1 - \frac{3\,\gamma_e}{L/D}\right)\gamma = -\frac{3\,\gamma_e^2}{L/D} \qquad (6.108)$$

ed infine

$$\gamma_{crit} = -\frac{3\,\gamma_e^2}{L/D} \qquad (6.109)$$

Da questa espressione si deduce che γ_{crit} è dell'ordine di grandeza di γ_e^2, ed avendo assunto γ_e piccolo, γ_{crit} risulta trascurabile rispetto a γ_e, ossia nella (6.100) si può scrivere

$$\gamma_e - \gamma_{crit} \simeq \gamma_e \qquad (6.110)$$

per cui

$$\rho_{crit} = \frac{2\,\beta\,C_B}{L/D}\,(\cos\gamma_{crit} - \cos\gamma_e) \simeq -\frac{2\,\beta\,C_B}{L/D}\,\gamma_e\,(\gamma_{crit} - \gamma_e) \simeq \frac{2\,\beta\,C_B}{L/D}\,\gamma_e^2 \qquad (6.111)$$

che permette di ricavare, attraverso la (6.88), il valore critico del flusso termico specifico:

$$\dot{q}_{w,crit} \;=\; \frac{c_F\, v_e^3}{2}\,\frac{\beta\, C_B}{L/D}\,\gamma_e^2\;\exp\left(\frac{3\,\gamma_e}{L/D}\right) \tag{6.112}$$

Si osserva che, ancora, esso aumenta con C_B (o diminuisce con $c_D\, S$), aumenta con il modulo dell'angolo di volo d'ingresso $\mid \gamma_e \mid$, ed infine diminuisce con L/D. Quindi l'introduzione di una portanza riduce sia il valore di picco delle decelerazione che il flusso critico, tanto per rientro planato che *skip*.

6.5.5 Carico termico totale e flusso termico specifico per rientro balistico

Nel calcolo del carico termico totale secondo l'approccio delineato nel par. 6.5.3 si è assunto che il corpo di rientro deceleri fino a velocità nulla. Le espressioni che abbiamo ricavato per i vari tipi di rientro considerati indicano tuttavia che il corpo possiederà, all'arrivo al livello del mare, una velocità non nulla, ricavabile ponendo $\rho = \rho_{sl}$ nelle (6.33,6.94) per il caso di rientro balistico e planato, rispettivamente, anche se abbiamo osservato che la validità di queste espressioni è dubbia a velocità relativamente bassa. Per rientro balistico la velocità finale è in particolare

$$v_f = v_e\,\exp\left(\frac{1}{2\,\beta\,\sin\gamma_e}\,\frac{1}{C_B}\,\rho_{sl}\right) \tag{6.113}$$

per cui la (6.85), integrata tra la velocità iniziale v_e e quella finale v_f dà il carico termico totale come

$$Q \;=\; \frac{c_F\, C_B}{4}\, S_w\,(v_e^2 \,-\, v_f^2) \tag{6.114}$$

e quindi il carico termico per unità di energia cinetica all'ingresso nell'atmosfera risulta

$$\frac{Q}{m\, v_e^2/2} = \frac{c_F}{2\, c_D}\,\frac{S_w}{S}\left[1 - \exp\left(\frac{1}{\beta\,\sin\gamma_e}\,\frac{1}{C_B}\,\rho_{sl}\right)\right] \simeq -\,\frac{c_F}{2\, c_D}\,\frac{S_w}{S}\,\frac{\rho_{sl}}{\beta\, C_B\,\sin\gamma_e} \tag{6.115}$$

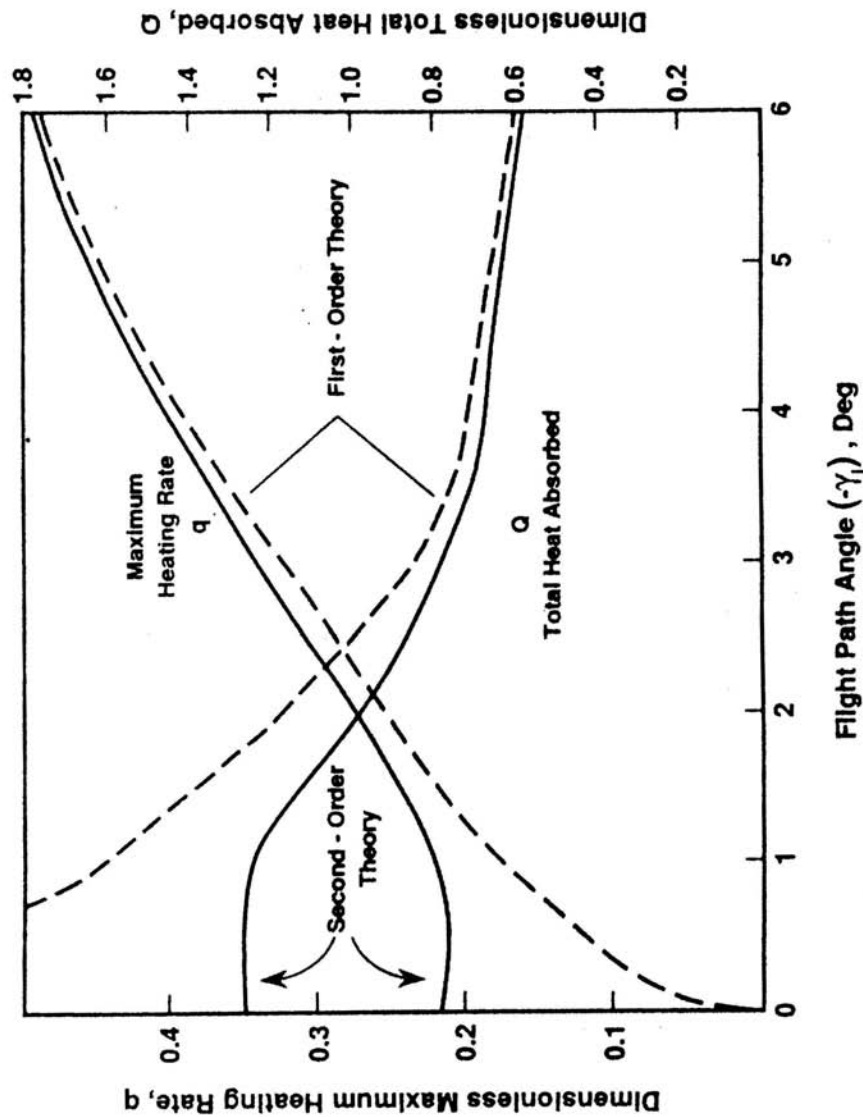


Figure 6.6: Carico termico e potenza termica per rientro balistico, in funzione dell'angolo di volo all'ingresso, da [26].

avendo espanso l'esponenziale in serie di Taylor di punto iniziale zero. Si può quindi osservare che tale carico termico diminuisce con $|\gamma_e|$, all'opposto del flusso termico critico dato dalla (6.93), come mostrato in fig. 6.6. Questo lascerebbe intendere che l'angolo di volo all'ingresso va scelto sulla base

di un compromesso tra le contrastanti esigenze di limitare il carico termico totale ed il flusso termico critico. In realtà però occorre osservare che la riduzione del carico termico totale che si ha adottando angoli di volo (in modulo) relativamente elevati è ottenuta a prezzo di una velocità finale più alta, per annullare la quale bisognerà ricorrere a sistemi addizionali quali retrorazzi, paracadute frenanti, etc.

6.6 De–orbitazione

Deriviamo ora il Δv che occorre applicare per far rientrare un satellite entro l'atmosfera, ed in particolare la sua relazione con l'angolo di volo all'ingresso, parametro che abbiamo visto essere di particolare importanza tanto per la decelerazione che per il carico termico. Consideriamo a titolo di esempio un'orbita circolare LEO di altezza h_{LEO}, quindi raggio $r_{LEO} = R_T + h_{LEO}$, essendo R_T il raggio della Terra, supposta sferica. Occorrerà applicare un Δv per ridurre la velocità dal valore di orbitazione circolare v_c ad un valore generico che indichiamo come v_i; applicando tale impulso tangenzialmente alla traiettoria, ma in senso contrario al moto, si ha

$$v_i \,=\, v_c \,-\, \Delta v \tag{6.116}$$

Il corpo di rientro viene quindi inserito in una traiettoria ellittica di altezza di perigeo minore di h_{LEO}; se in particolare tale altezza è sufficientemente bassa, minore od uguale di quei 122 km che sono stati formalmente assunti come limite dell'atmosfera, si ha il rientro.

Determiniamo ora, data la velocità v_i conseguente all'applicazione del Δv di de–orbitazione, la velocità v_e e l'angolo di volo γ_e all'ingresso nell'atmosfera (cioè per raggio $r_e = R_T + 122$ km), che abbiamo visto essere i parametri di rientro che determinano la decelerazione, il carico termico totale ed il flusso termico specifico. Dalla conservazione dell'energia meccanica totale, applicata tra l'istante iniziale e l'istante di ingresso nell'atmosfera, si ha

$$\mathcal{E} \,=\, \frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_{LEO}} \,=\, \frac{v_e^2}{2} - \frac{\mu_T}{r_e} \tag{6.117}$$

Dalla conservazione del momento angolare si ha

$$\hat{h} \,=\, r_{LEO}\, v_i \,=\, r_e\, v_e\, \cos\gamma_e \tag{6.118}$$

Dalla (6.117) si ricava la velocità all'ingresso nell'atmosfera

$$v_e \;=\; \sqrt{v_i^2 \,+\, 2\,\mu_T\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_{LEO}}\right)} \tag{6.119}$$

e dalla (6.118) si ricava l'angolo di volo all'ingresso

$$\gamma_e \;=\; \cos^{-1}\left(\frac{r_{LEO}\,v_i}{r_e\,v_e}\right) \tag{6.120}$$

La fig. 6.7 riporta il Δv necessario per de–orbitare un satellite da una LEO circolare, in funzione dell'angolo di volo all'ingresso (in modulo), con l'altezza dell'orbita a parametro. Il Δv minimo si ha ovviamente quando l'altezza del perigeo della traiettoria ellittica di deorbitazione coincide con il valore assunto come limite dell'atmosfera (122 km); in questo caso, per esempio per h_{LEO} = 200 km si ha

$$\Delta v \;=\; 24 \quad \text{m/s} \tag{6.121}$$

Questo Δv cresce al crescere dell'angolo di volo richiesto all'ingresso in atmosfera (ma abbiamo visto che in generale conviene un angolo piccolo), e poi al crescere dell'altezza dell'orbita di partenza.

La fig. 6.8 lega poi velocità ed angolo di volo all'ingresso nell'atmosfera.

Nel caso di satelliti in orbita geostazionaria, si pone il problema di rimuoverli, una volta arrivati a fine vita operativa, dalla GEO per limitare l'affollamento dell'orbita stessa (che come detto è unica). Si potrebbe a tal fine de–orbitare il carico utile fino a farlo giungere a terra, ma questo richiederebbe un Δv di almeno 1485 m/s. Una soluzione molto più economica è quella di inviare il satellite in una 'orbita cimitero' (*graveyard orbit*), più alta della GEO. Se per esempio si considera il trasferimento alla Hohmann tra la GEO ed un'orbita di 1000 km più alta, si trova facilmente che il Δv richiesto al perigeo è di appena 18 m/s, è così pure quello di apogeo, per complessivi quindi 36 m/s.

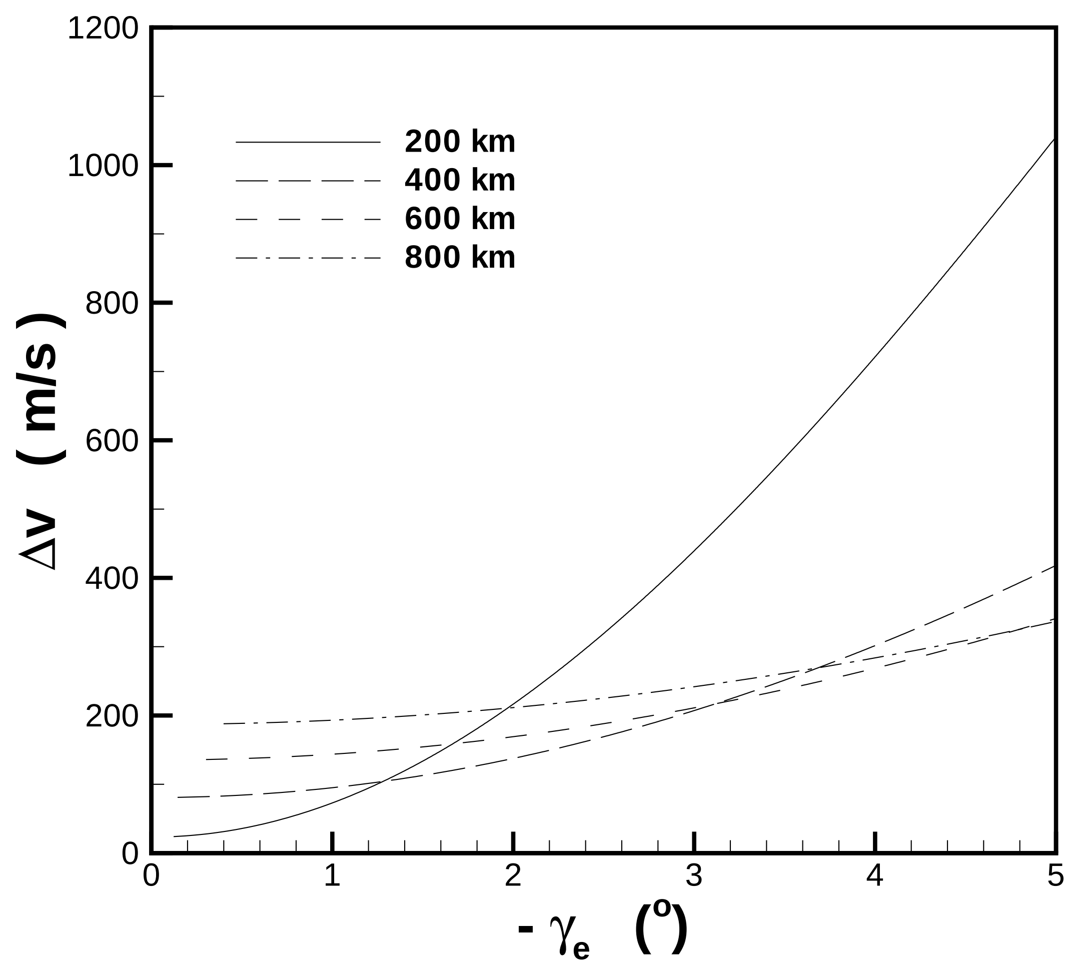


Figure 6.7: Δv richiesto per de–orbitazione da orbite circolari di differente altezza, in funzione dell'angolo di volo all'ingresso nell'atmosfera.

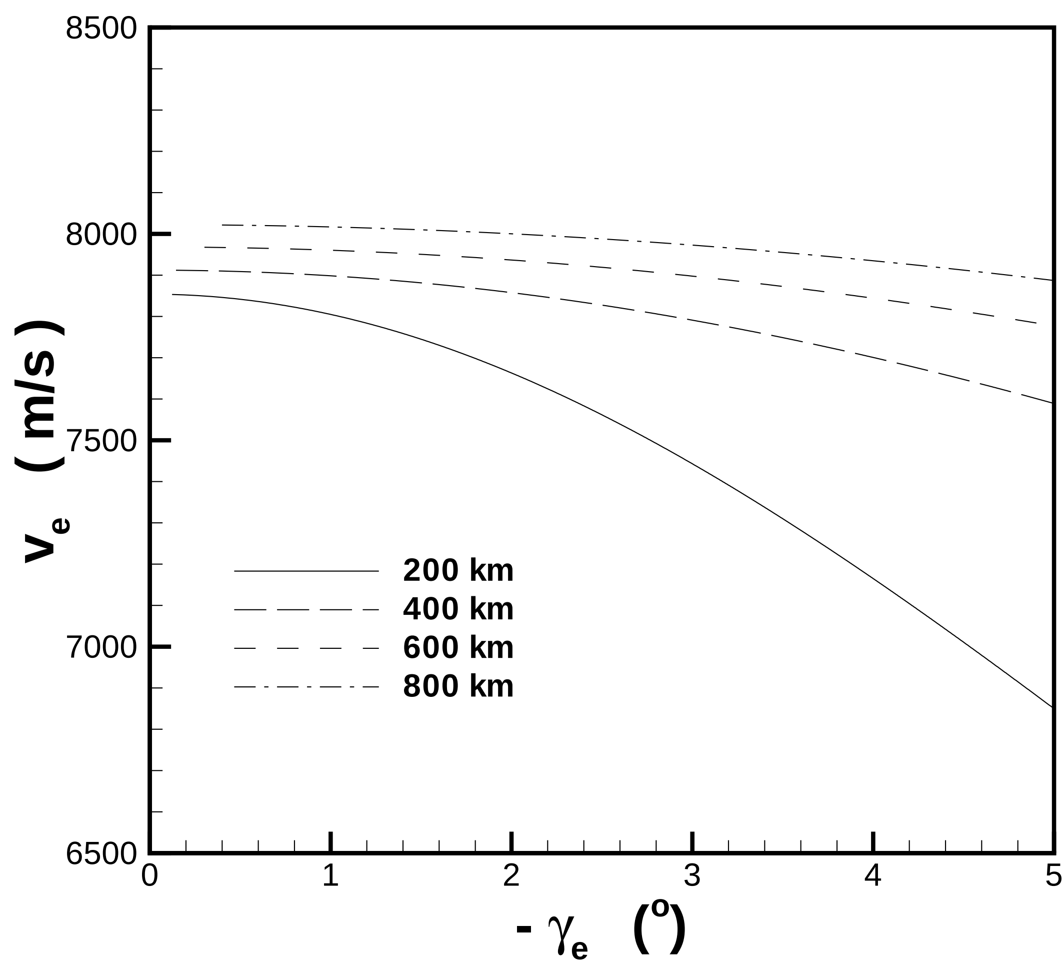


Figure 6.8: Velocità all'ingresso nell'atmosfera, per de–orbitazione da orbite circolari di differente altezza, in funzione dell'angolo di volo all'ingresso.

Capitolo 7
Missioni interstellari

Le distanze interstellari sono misurabili in anni–luce, dove un anno luce è la distanza percorsa dalla luce, la quale viaggia nel vuoto ad una velocità

$$\hat{c} \;=\; 299\,792,5\;\frac{\text{km}}{\text{s}} \;\simeq\; 3\cdot 10^8\;\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{7.1}$$

nell'arco un anno, quindi

$$1\text{ anno–luce} \;=\; \hat{c}\,\cdot\,31\,536\,000 \;\simeq\; 9,45\cdot 10^{15}\;\text{ m} \;=\; 9,45\cdot 10^{12}\;\text{ km} \tag{7.2}$$

La stella più vicina, il sistema triplo di α Centauri (Rigil Kent) dista circa 4,3 anni–luce. Ne segue che per avere tempi di missione accettabili (non superiori all'arco di una vita umana) la velocità di volo v dovrà essere grosso modo non più di un ordine di grandezza inferiore alla velocità della luce.

Cercare di raggiungere velocità di tale entità mediante i propulsori attuali (chimici o elettrici) porterebbe evidentemente a rapporti di massa irrisori (per non parlare dei rapporti di carico utile). Se si vogliono prendere in considerazione missioni interstellari, occorre quindi ipotizzare la disponibilità di un rivoluzionario propulsore, in grado di garantire velocità efficaci d'uscita non di molto inferiori alla velocità della luce, oppure di un sistema propulsivo non basato sull'espulsione di materia (vedi oltre), ma dalle prestazioni comunque necessariamente elevatissime. Ancorché tale propulsore non sia ovviamente all'ordine del giorno, vogliamo tuttavia in questo capitolo identificare i problemi che si porrebbero nel caso ipotetico in cui si avesse effettivamente a disposizione un propulsore adeguato per missioni interstellari.

Un sistema di unità di misura adatto per descrivere viaggi interstellari potrebbe adottare come unità di lunghezza l'anno–luce, e come unità di tempo l'anno, quindi come unità di velocità la velocità della luce. In tale sistema, il valore unitario di accelerazione corrisponde a $\hat{c}^2/(1\text{ anno–luce}) \simeq 9{,}5$

m/s^2; curiosamente, tale valore è molto prossimo all'accelerazione di gravità terrestre, per cui lo indicheremo con il simbolo $\hat{g}$.

Supponiamo di considerare un'ipotetica missione ad accelerazione costante a pari a un $\hat{g}$. Se fossero valide le leggi della meccanica classica, la velocità conseguita dal veicolo al tempo T risulterebbe

$$v = a\,T = T \tag{7.3}$$

dove l'ultima eguaglianza discende appunto dall'aver assunto accelerazione unitaria. La distanza X percorsa dal veicolo fino al tempo T si ricava integrando la (7.3), per cui

$$X = \frac{T^2}{2} \tag{7.4}$$

Occorre però osservare che le leggi della meccanica classica sono applicabili fino a velocità dell'ordine al massimo di un decimo della velocità della luce; per velocità superiori vanno applicate le leggi della meccanica relativistica, che indicano che la velocità massima raggiungibile comunque non può superare la velocità della luce, e che all'aumentare della velocità la massa non rimane più costante, ma cresce secondo l'espressione

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{\hat{c}^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{7.5}$$

dove m_0 indica la massa del veicolo a riposo (l'ultimo passaggio deriva dall'aver assunto unitaria la velocità della luce nel vuoto). Si può in particolare evincere dalla (7.5) che avvicinandosi alla velocità della luce la massa tende all'infinito. Possiamo quindi individuare tre campi:

1. un campo della meccanica classica, fino ad una velocità circa 0,1 $\hat{c}$, nel quale l'effetto di una forza (la spinta) applicata ad un veicolo è quello di aumentarne la velocità, mentre la massa resta sostanzialmente costante, come si può verificare dalla (7.5), la quale indica che per $v =$ 0,1 $\hat{c}$ la massa è aumentata appena dello 0,5% circa rispetto al valore a riposo;

2. un campo relativistico, per velocità comprese nel campo 0,1 $\hat{c} < v <$ 0,9 $\hat{c}$, nel quale l'effetto della forza applicata al veicolo è quello di farne aumentare tanto la velocità quanto la massa;

3. un campo ultrarelativistico, per velocità maggiori di 0,9 $\hat{c}$ circa, nel quale l'effetto di una forza applicata al veicolo è quello di farne aumentare la massa, mentre la velocità rimane praticamente costante ad un valore molto prossimo a $\hat{c}$.

Quando la velocità del veicolo diventa confrontabile con la velocità della luce, occorre quindi applicare le leggi della meccanica relativistica, secondo la quale in particolare, come detto, la velocità non può superare la velocità della luce. La (7.3) è allora sostituita dalla (sempre per accelerazione unitaria, nelle unità adottate)

$$v = \frac{T}{\sqrt{1 + T^2}} \tag{7.6}$$

la quale limita evidentemente la velocità massima ad un valore asintotico unitario (cioè alla velocità della luce), avvicinabile per lunghi tempi di spinta, come mostrato in fig. 7.1. Lo spazio percorso nel tempo T si ottiene ancora come integrale della velocità tra il tempo iniziale 0 ed il tempo finale T, quindi

$$X = \sqrt{1 + T^2} - 1 \tag{7.7}$$

Occorre però notare che per un ipotetico equipaggio a bordo del veicolo, il tempo fluirebbe più lentamente per l'effetto relativistico di dilatazione del tempo. Il tempo t riscontrato dall'equipaggio risulta legato al tempo T terrestre dalla relazione (sempre per accelerazione unitaria)

$$t = \sinh^{-1} T = \log\left(T + \sqrt{1 + T^2}\right) \tag{7.8}$$

dove nel secondo passaggio la funzione inversa del seno iperbolico è stata posta in forma esplicita. La relazione tra tempo e distanza è illustrata in fig. 7.2. Si può osservare che, mentre la meccanica classica indica, per accelerazione costante, una relazione sotto forma di radice quadrata tra tempo e distanza per la (7.4), la meccanica relativistica indica una relazione che, per tempi superiori ad un anno o poco più, è sostanzialmente lineare perché la velocità ha ormai quasi raggiunto il limite della velocità della luce. Il tempo per l'equipaggio, per distanze superiori a circa un anno luce, aumenta invece molto lentamente con la distanza da percorrere, perché il tempo si dilata grandemente quando la velocità del veicolo si avvicina a quella della luce.

Consideriamo ora una ipotetica missione verso la stella più vicina, il sistema di α Centauri, distante come detto circa 4,3 anni luce. Supponiamo di applicare una spinta che dia un'accelerazione unitaria

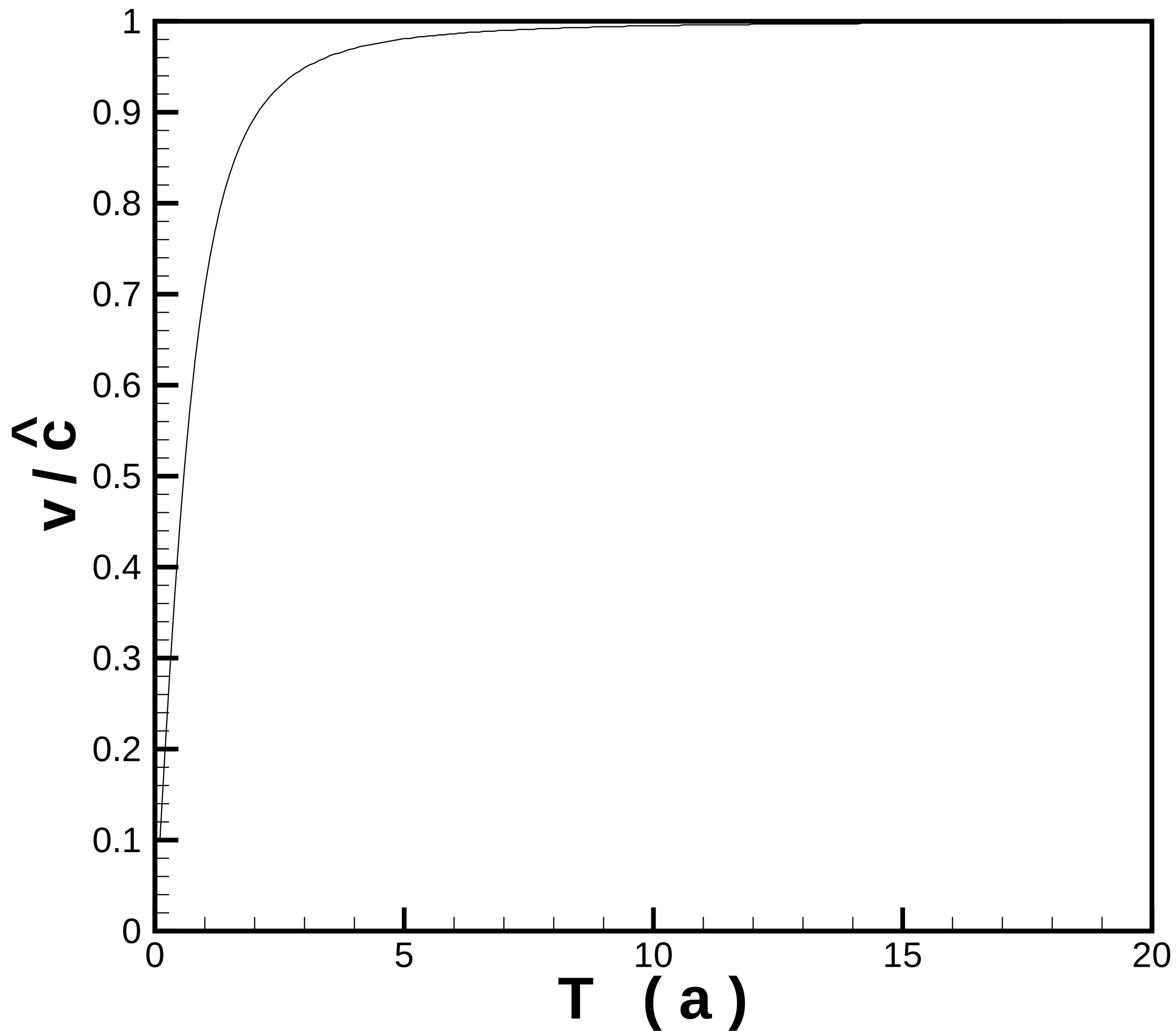


Figure 7.1: Velocità conseguita in funzione del tempo di spinta, per missione ad accelerazione costante 1 ĝ.

(1 ĝ) per un tempo (terrestre) T_b, seguito da una fase di *coast* (volo a motore spento) di durata T_c, ed infine da una fase di decelerazione (sempre con valore unitario, in modulo) ancora di durata T_b, in modo da arrivare in prossimità dell'obiettivo con velocità circa nulla. Per completare la missione, occorrerebbe poi considerare il tempo impiegato dai segnali trasmessi dalla sonda ad arrivare fono a Terra; poiché tali segnali viaggiano alla velocità della luce, tale tempo è numericamente uguale al

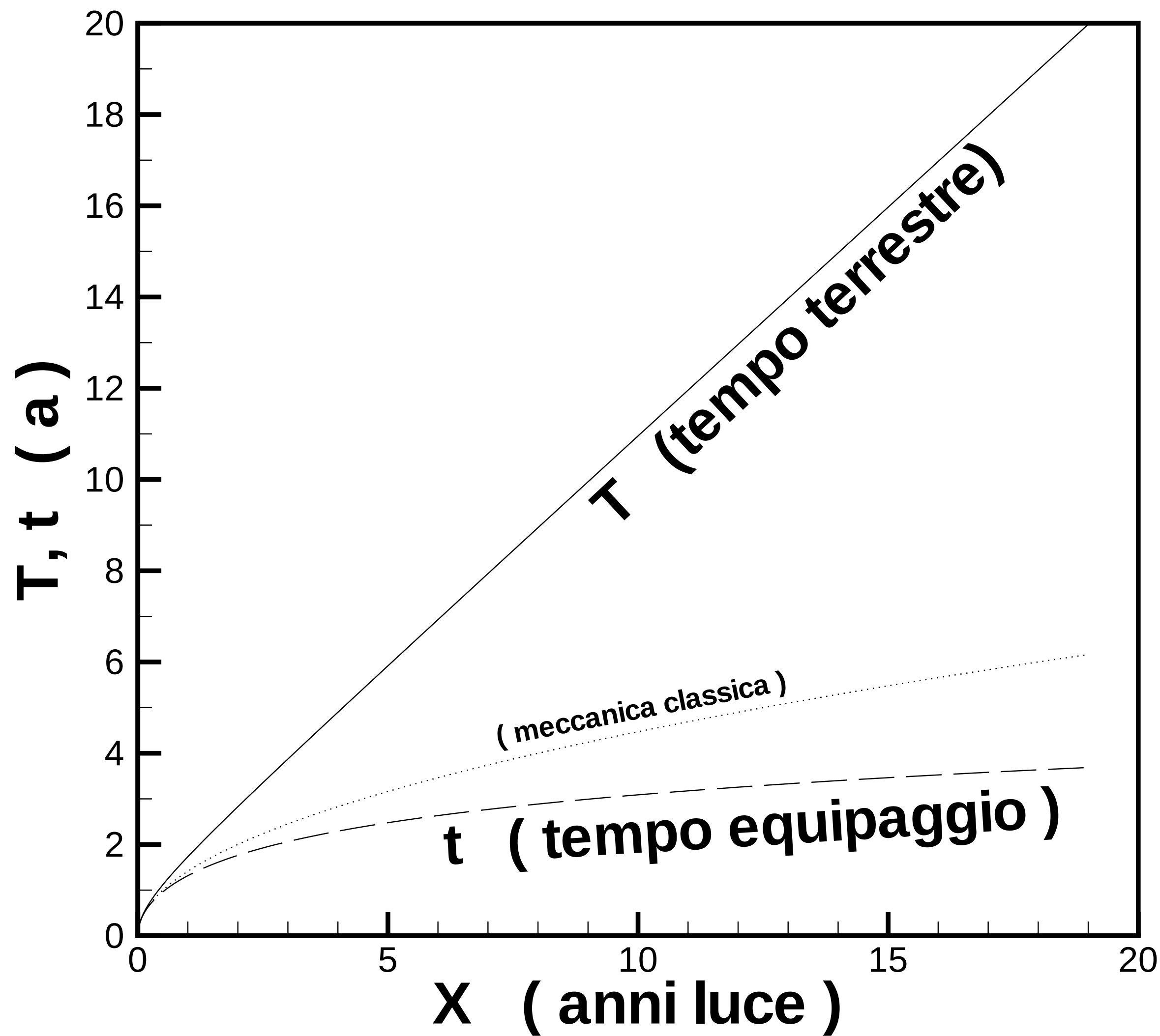


Figure 7.2: Tempo terrestre e tempo per l'equipaggio per missione ad accelerazione costante 1 ĝ, in funzione della distanza.

valore della distanza X espressa in anni luce. Il tempo totale di missione sarà pertanto

$$T_{tot} \; = \; 2\,T_b \; + \; T_c \; + \; X \tag{7.9}$$

La fase di accelerazione ha durata T_b, e porta il veicolo da una velocità iniziale circa nulla (o comunque trascurabile rispetto alla velocità della luce) alla velocità massima v_{max}. Parimenti, la fase di decelerazione ha durata T_b, e porta il veicolo dalla velocità v_{max} ad una velocità (circa) nulla. La fase di *coast* ha durata T_c; evidentemente, assegnata l'accelerazione (qui assunta unitaria), T_b e la distanza da percorrere, T_c è determinato di conseguenza[21].

La fig. 7.3 riporta il tempo totale della missione (7.9) in funzione del tempo di spinta T_b. Si può osservare come il tempo totale si riduce solo marginalmente per durate del tempo di spinta superiori a circa 0,3 – 0,5 anni, perché ormai la velocità della sonda è prossima a quella della luce.

Si evince quindi che la velocità massima che consente di conseguire il miglior compromesso tra tempi di missione e requisiti energetici (i quali sono ovviamente direttamente legati alla durata della fase propulsa) è probabilmente compresa nel campo tra 0,1 e 0,5 volte la velocità della luce. Supponiamo per esempio di voler inviare una sonda della massa di 1000 kg, e di puntare a raggiungere una velocità massima dell'ordine di un terzo della velocità della luce, quindi $v_{max} = \hat{c}/3 \simeq 10^8$ m/s. Per effetto della (7.5), la massa della sonda a questa velocità sale a circa 1060 kg, e la corrispondente energia cinetica acquisita risulta $E = m\, v_{max}^2/2 \simeq 5{,}3 \cdot 10^{18}$ J, che rappresenta l'equivalente dell'energia prodotta, sotto tutte le forme, su tutta la Terra in quattro o cinque giorni, oppure dell'energia prodotta dalla combustione di circa 125 milioni di tonnellate di petrolio (più una massa d'aria 15 volte maggiore). Si vede quindi come anche una missione interstellare diciamo di basso profilo comporti requisiti energetici estremamente elevati, oltre al fondamentale problema di escogitare un propulsore adeguato.

Vediamo ora, al solo fine di identificare i problemi risultanti, come potrebbe essere architettata una missione più impegnativa, relativa all'invio, e successivo ritorno, di un'astronave ospitante un'equipaggio umano. Per esercitare una spinta sull'astronave, potrebbe essere utilizzata la pressione esercitata da un fascio di luce collimato su una 'vela' solidale all'astronave stessa. Se chiamiamo S l'intensità (potenza per unità di superficie) del fascio di luce che colpisce tale vela, questa subirà una 'pressione' dovuta a tale radiazione data dalla (3.52). Se la superficie fosse perfettamente riflettente, il valore della pressione esercitata raddoppierebbe. Per esempio, il valore di S dovuto alla luce solare in prossimità della Terra è di circa 1350 W/m^2 (al difuori dell'atmosfera, su una superficie normale ai raggi del Sole; per effetto dell'assorbimento atmosferico, esso si riduce a circa 1000 W/m^2 al livello del suolo). Ne segue che la pressione esercitata dalla luce solare ammonterebbe a circa 4,5 μPa, che salirebbero a 9 μPa supponendo di adottare una vela perfettamente riflettente. È ovvio, considerando il peso della vela, che tale pressione sarebbe assolutamente insufficiente a produrre l'accelerazione

[21]Comunque, assegnato il valore del modulo dell'accelerazione, la durata della fase di spinta è limitata ad un valore massimo in corrispondenza del quale T_c si riduce a zero; oppure, alternativamente, assegnato T_b, il valore dell'accelerazione è limitato ad un valore massimo in corrispondenza del quale ancora T_c si riduce a zero.

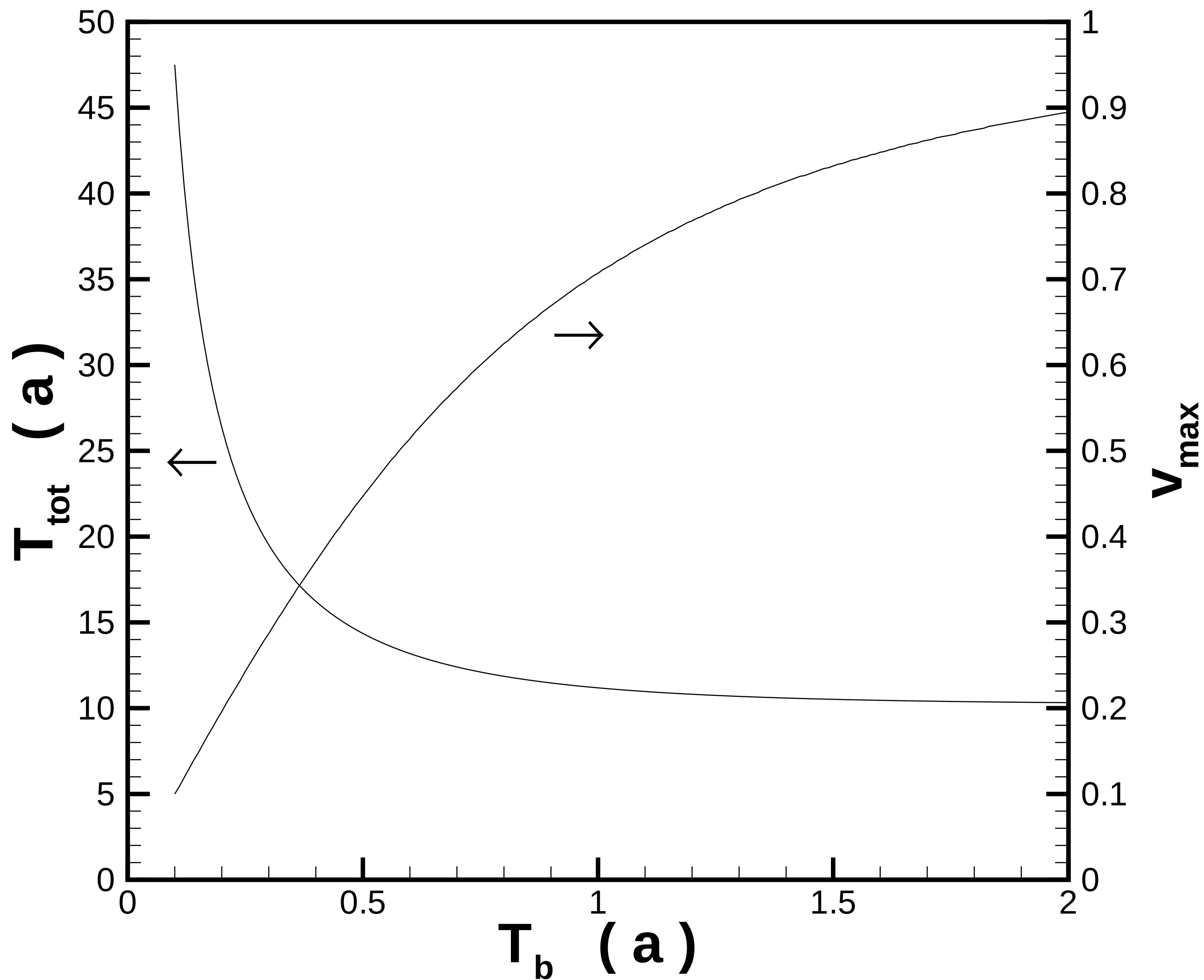


Figure 7.3: Tempo totale (terrestre) e velocità massima conseguita per missione ad accelerazione costante 1 $\hat{g}$ verso α Centauri, in funzione del tempo di spinta.

richiesta per una missione interstellare, anche e soprattutto perché l'intensità della luce solare va progressivamente riducendosi man mano che l'astronave si allontana dal Sole. Bisogna quindi pensare ad una sorgente di radiazione più intensa, collimata sulla vela per mezzo di un'opportuna ottica, onde non soffrire per effetto dell'allontanamento dell'astronave. Questo concetto prende il nome di

light sail, vela a luce (laser)[22].

La fig. 7.4 illustra come tale concetto potrebbe essere sfruttato per una missione di andata e ritorno interstellare. Un potente laser parcheggiato in un'orbita entro il sistema solare genera un fascio di luce che viene collimato sull'astronave grazie ad una lente di Fresnel.

Tale tipo di lente, il cui profilo è confrontato in fig. 7.5 con quello di una lente piano–convessa (che potrebbe in linea di principio svolgere la stessa funzione collimatrice), consta di una sottile lamina sulla quale sono scavati numerosi profili di forma opportuna, con simmetria rispetto all'asse della lente; essa risulta perciò molto più leggera di una lente convenzionale. Per la missione in questione, supponendo per l'astronave una massa di 3000 t per supportare l'equipaggio per tutta la lunga durata della missione, sarebbe necessario realizzare una lente di Fresnel del diametro di circa 1000 km, con uno spessore di 1 μm, e massa risultante di circa 560000 t... Questo dà una prima (parziale) idea delle difficoltà da superare. Ad ogni modo, tale lente collima il fascio di radiazione generato dal laser su una vela del diametro di 1000 km, di massa totale 80000 t, sulla quale viene quindi generata la spinta che accelera l'astronave verso la stella obiettivo, con accelerazione 0,3 g, consentendo di raggiungere una velocità di 0,5 $\hat{c}$ in circa 1,6 anni. Giunti in prossimità dell'obiettivo, occorre iniziare la manovra di decelerazione; a tal fine, una corona esterna della vela si stacca, e riflette la luce del laser sulla porzione rimanente di vela, di diametro ridotto a 320 km, fornendo una spinta in direzione opposta a quella iniziale, frenando dunque l'astronave e permettandole di avvicinare il sistema solare obiettivo con velocità adeguata. Una volta terminata l'esplorazione del sistema, un'ulteriore corona si stacca e riflette il fascio di luce inviato dal laser verso un'ultima porzione di vela rimasta solidale all'astronave, di diametro 100 km. Giunti in prossimità del nostro sistema solare, occorre iniziare la manovra di frenaggio, che viene conseguita inviando il fascio di luce laser direttamente sulla vela rimasta solidale all'astronave. Resta da individuare la potenza richiesta al laser, che risulta essere di 43000 TW[23], da confrontare con i circa 13 TW di potenza attualmente prodotti su tutta la Terra in tutte le forme... Tale potenza andrebbe fornita per un periodo di oltre tre anni.

Il problema delle missioni interstellari non è quindi solo tecnologico (disponibilità di un sistema propulsivo adeguato), ma anche e soprattutto energetico.

[22]Notiamo per inciso che questi sistemi propulsivi basati su vele non sono classificabili come endoreattori, in quanto non vi è espulsione di materia stivata a bordo.

[23]1 TW = 1 terawatt = 10^{12} W.

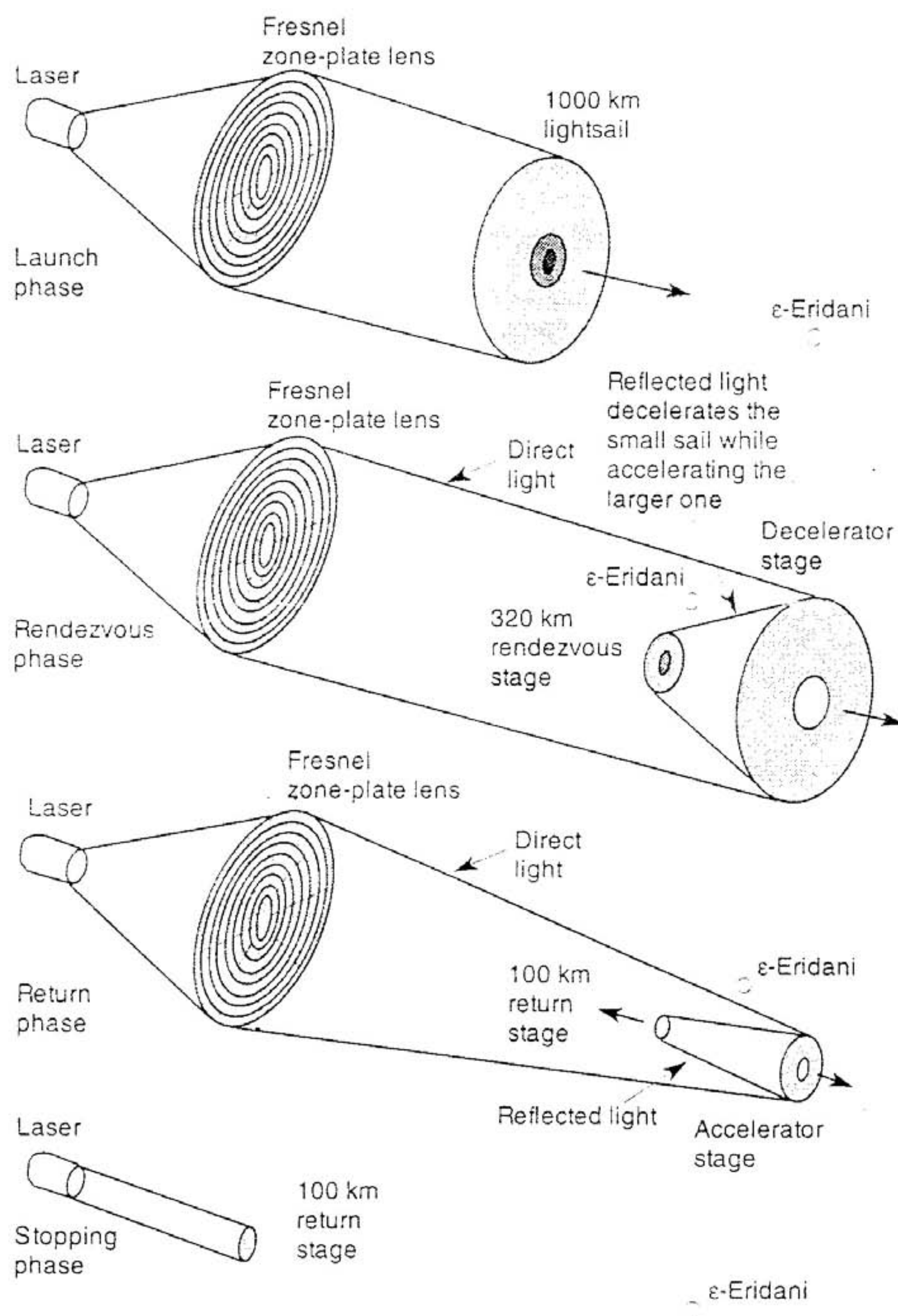


Figure 7.4: Missione di andata e ritorno interstellare mediante *light sail*, da [7].

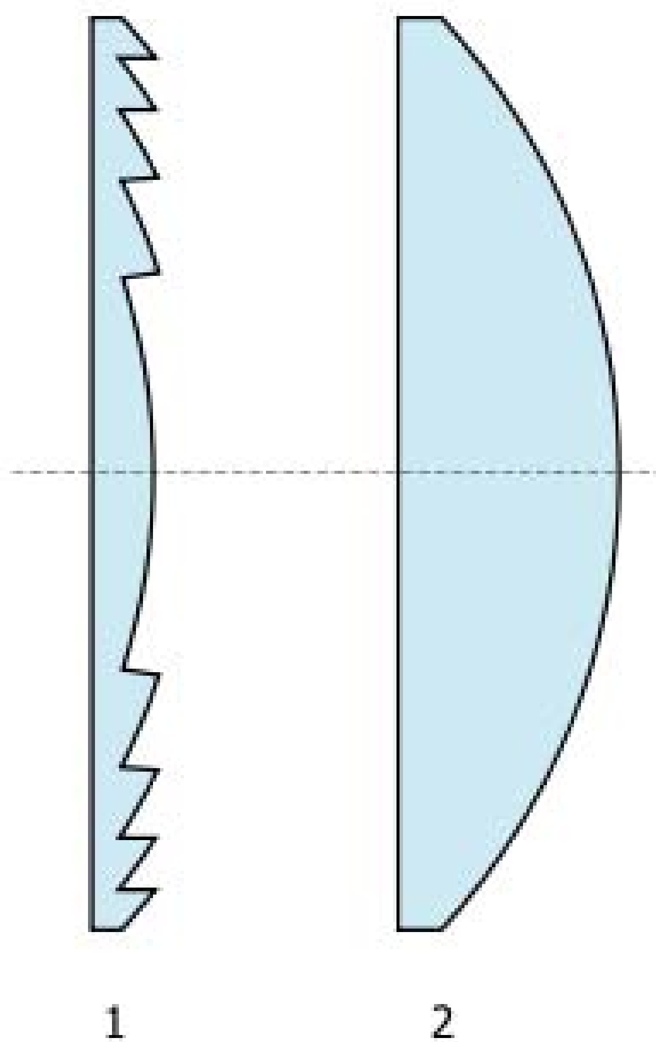


Figure 7.5: Profilo di una lente di Fresnel (a sinistra) confrontato con quello di una lente piano–convessa (a destra), da [29].

Bibliography

[1] Colasurdo, G., Dispense del corso di Meccanica Orbitale, http://dma.ing.uniroma1.it/users/lss_mo/index.html.

[2] Brown, C.D., *Spacecraft mission design*, AIAA, Washington, 1992.

[3] website ...

[4] website ...

[5] website ...

[6] website ...

[7] Humble, R.W., Henry, G.N. e Larson, W.S., *Spacecraft propulsion analysis and design*, McGraw–Hill, New York, 1995.

[8] Sutton, G.P., *Rocket Propulsion Elements*, 6ª ed., Wiley, New York, 1992.

[9] Biggs, R.E., 'Space Shuttle Main Engine, the first ten years', 1992.

[10] website ...

[11] website ...

[12] website ...

[13] website ...

[14] website ...

[15] website ...

[16] ...

[17] Well, K.H., ASTOS NT 4.5.2 Aerospace Trajectory Optimization Software, Inst. of Flight Mechanics and Control, Univ. of Stuttgart, 2000.

[18] Gath, P., Wiegand, A., Markl, A. e Well, K.H., 'Recent improvements in the trajectory optimization software ASTOS', in *High–Performance Scientific and Engineering Computing*, Breuer, M., Durst, F. e Zenger, C., Eds., Springer Verlag, Berlin, 2002.

[19] GESOP, website www.gesop.de, 2006.

[20] ...

[21] McConnell, H., *Mathematics and model rockets*, ESTES, 2000.

[22] Chobotov, V.A., *Orbital mechanics*, AIAA, Washington, 1991.

[23] Belbruno, E.A., Lunar capture orbits, a method of constructing Earth–Moon trajectories and the Lunar GAS mission, paper AIAA 87–1054.

[24] Belbruno, E.A. e Miller, J., Sun–perturbed Earth–to–Moon transfers with ballistic capture, *J. Guid., Control and Dynamics*, 16:770, 1993.

[25] Mathworld, http://mathworld.wolfram.com/Hyperbola.html.

[26] Griffin, M.D. e French, J.R., *Space vehicle design*, AIAA, Washington, 1991.

[27] White, F.M., *Viscous fluid flow*, McGraw–Hill, New York, 1991.

[28] ...

[29] ...

